А.Картан

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ *Москва, 1963*

Книга представляет собой курс, читанный Анри Картаном на факультете наук в Париже. В нем излагаются основные идеи теории аналитических функций, причем особенно подчеркиваются связи классического материала с новыми понятиями современной математики.

Изложение вполне элементарно, курс освобожден от ряда второстепенных деталей, но наряду с общими идеями содержит и много конкретных методов.

Написанный крупным ученым, полный свежих идей, этот курс будет с интересом читаться студентами университетов и педвузов, преподавателями высших учебных заведений (в том числе и технических) и научными работниками — математиками, механиками и физиками.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава I. Степенные ряды от одного переменного	11
§.1. Формальные степенные ряды	11
§ 2. Сходящиеся степенные ряды	20
§ 3. Экспоненциальная и логарифмическая функции	35
§ 4. Аналитические функции действительного и комплексного переменного	45
Упражнения	55
Глава II. Голоморфные функции, интеграл Коши	62
§ 1. Криволинейные интегралы	62
§ 2. Голоморфные функции; основные теоремы	84
Упражнения	97
Глава III. Ряды Тейлора и Лорана. Особые точки и вычеты	102
§ 1. Неравенство Коши; теорема Лиувилля	102
§ 2. Теорема о среднем. Принцип максимума	104
§ 3. Лемма Шварца	107
§ 4. Разложение функций в ряд Лорана	108
§ 5. Введение бесконечной точки. Теорема о вычетах	115
§ 6. Вычисление интегралов с помощью вычетов	126
Упражнения	140
Глава IV. Аналитические функции многих переменных; гармонические функции	153
§ 1. Степенные ряды с многими переменными	153
§ 2. Аналитические функции	156
§ 3. Гармонические функции двух действительных переменных	158
§ 4. Формула Пуассона. Задача Дирихле	165
§ 5. Голоморфные функции многих комплексных переменных	171
Упражнения	178

Глава V. Сходимость последовательностей голоморфных и мероморфных функций. Ряды, бесконечные произведения; нормальные семейства 183
§ 1. Топология пространства $\mathcal{C}(D)$ 183
§ 2. Ряды мероморфных функций 191
§ 3. Бесконечные произведения голоморфных функций 203
§ 4. Компактные подмножества в пространстве $\mathcal{H}(D)$ 209
Упражнения 217
Глава VI. Голоморфные отображения 222
§ 1. Общие понятия. Примеры 222
§ 2. Конформное отображение 230
§ 3. Основная теорема о конформных отображениях 238
§ 4. Понятие аналитического пространства. Интегрирование дифференциальных форм 243
§ 5. Римановы поверхности 254
Упражнения. 270
Глава VII. Системы дифференциальных уравнений 274
§ 1. Теорема существования и единственности 274
§ 2. Зависимость от параметров и начальных условий 281
§ 3. Дифференциальные уравнения высшего порядка 284
Упражнения 285
Некоторые ответы 289
Предметный указатель 290
Указатель обозначений 294

Предметный указатель

Цифры обозначают соответственно номер главы номер параграфа номер пункта (или, возможно, упражнения).

Автоморфизм области	VI	2	2
— сферы Римана	VI	2	4
Адамара теорема о трех кругах	III	упр.	8
— формула	I	2	3
Алгебра полиномов	I	1	1
— формальных степенных рядов	I	1	2
Аналитическая функция	I	4	1
	IV	2	2
Аналитическое пространство	VI	4	2
Антиголоморфное преобразование	VI	1	1
Аргумент	I	3	4
Бесконечная точка	III	5	1
Вейерштрасса теорема	III	4	4
— функция Sp	V	2	b
Величина абсолютная комплексного числа	I	2	1
Ветвление	VI	4	6
Вычет	III	5	2
— на аналитическом пространстве	VI	4	8

Гармоническая функция	IV	3	1
Гартогс	IV	5	2
Голоморфная функция	II	2	2
— — на аналитическом пространстве	VI	4	1
— — — бесконечности	III	5	I
— — римановой поверхности	VI	5	2
— — сфере Римана	III	5	1
— — нескольких переменных	IV	3	1
Гомотопные пути замкнутые	II	1	6
— — с фиксированными концами	II	1	6
Граница компакта ориентированная	II	1	9
Грина — Римана формула	II	1	3
		и	9
Группа автоморфизмов	VI	2	2
— — плоскости	VI	2	3
— периодов	III	5	5
Даламбера теорема	III	1	2
Дирихле задача	IV	4	3
Звездное множество	II	1	7
Изменение аргумента	II	1	5
Изоморфизм аналитических пространств	VI	4	2
— одной области на другую	VI	1	3
Инверсия с отражением	VI	2	Ь
Индекс ветвления	VI	4	6
— замкнутого пути	II	1	8
Карта	III	5	1
Конформное отображение	VI	1	1
— представление	VI	2	1
Координаты локальные	VI	4	1
Коши интегральная формула	II	2	Ь
	IV	5	2
— неравенство	III	1	1
	III	4	4
	IV	5	4
— теорема	II	2	4
Кратность нуля	I	4	4
— полюса	I	4	Ь
Кривая эллиптическая	V	2	5
	VI	5	3
Критическая точка	VI	1	2
Лапласа оператор	IV	3	1
Лиувилля теорема	III	1	*2*
Логарифм комплексный	1	3	*Ь*
Лорана разложение	III	4	2

— ряд	III	4	1
Мера угла	I	3	4
Мероморфная функция	I	4	5
— — на аналитическом пространстве	VI	4	5
— — — бесконечности	III	5	1
— — — римановой поверхности	VI	5	2
Модуль комплексного числа	I	2	1
Морера теорема	II	2	7
Накрытие	VI	5	1
Непрерывная ветвь логарифма	I	3	o
Неразветвленная риманова поверхность	VI	5	1
Неразветвленное отображение	VI	4	6
Норма комплексного числа	1	2	1
Нормальная сходимость ряда	1	2	2
Область сходимости	IV	1	2
Обратный ряд в кольце сходящихся степенных рядов	I	2	6
— — — — формальных рядов	I	1	5
— — относительно закона композиции к сходящемуся степенному ряду	I	2	9
— — — — — — формальному ряду	I	1	7
Ограниченное подмножество пространства $\mathcal{H}(D)$	V	4	1
Однолистное отображение	V	1	2
Односвязная область	II	1	7
Ориентация пути	II	1	1
Открытое отображение	VI	1	3
Параллелограмм периодов	III	5	5
Периоды (интеграла дифференциальной формы на аналитическом пространстве)	VI	4	8
Пикара теорема	III	4	4
Поверхность Римана	VI	5	1
Подгруппа стационарная	VI	2	3
Поднятие пути	VI	5	4
Подстановка одного формального ряда в другой	I	1	4
— сходящегося степенного ряда	I	2	5
Полюс	I	4	5
	III	4	4
Порядок формального ряда	I	1	3
— — — нескольких переменных	IV	1	1
Последовательность компактов исчерпывающая	V	1	3
Примитивная дифференциальной формы	II	1	2
— — — на аналитическом пространстве	IV	4	8
— замкнутой дифференциальной формы вдоль пути	II	1	5
Принцип аналитического продолжения	I	4	3
	IV	2	3

	VI	4	4
	VI	5	4
— максимума	III	2	2
	VI	4	4
	IV	упр.	4
Произведение бесконечное	V	3	1
Производная сходящегося степенного ряда	I	2	7
— формального ряда	I	1	6
Пространство аналитическое	VI	4	2
Пуассона формула	IV	4	1
— ядро	IV	4	1, 2
Путь гладкий	II	1	1
— замкнутый	II	1	1
— кусочно гладкий	II	1	1
— не обязательно гладкий	II	1	5
Равномерно сходящийся ряд	I	2	2
Радиус сходимости	I	2	3
Разложение Лорана	III	4	2
— Тейлора	II	2	6
Разложимость функции в ряд Лорана	III	4	2
— — — степенной ряд	I	4	1
Римана сфера	III	5	1
Риманова поверхность	VI	5	1
Руше теорема	III	упр.	19
Ряд Лорана	III	4	1
— мажорирующий	VII	1	3
— Тейлора	III	1	1
— формальный	I	1	2
— — нескольких переменных	IV	1	1
Семейство нормальное	V	4	
Симметрии принцип	II	2	9
	VI	упр.	6
Структура аналитическая индуцированная	VI	4	2
— аналитического пространства	VI	4	1
Субгармоническая функция	IV	упр.	4
Суммируемое семейство формальных рядов	1	1	3
Сфера Римана	III	5	1
Сходимость нормальная на компактах	V	1	1
— равномерная на компактах	V	1	1
— рядов мероморфных функций	V	2	1
Тейлора разложение	II	2	6
— ряд	III	1	1
Теорема о среднем для гармонических функций	IV	3	3
	IV	4	5

— — — — голоморфных функций	III	2	1
— основная о конформных отображениях	VI	4	7
	VI	3	1
Точка критическая	VI	1	2
— особая изолированная	III	4	4
— существенно особая	III	4	4
Форма дифференциальная голоморфная на аналитическом пространстве	VI	4	8
— — замкнутая	II	1	4
Функция Г	V	3	4
— $\wp$-Вейерштрасса	V	9	5
Шварца Лемма	III	3	
Эквивалентные структуры аналитических пространств	VI	4	2
Экспоненциальная функция	I	3	1
— — действительная	I	3	9
— — мнимая	I	3	3
Ядро Пуассона	IV	4	1,2

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга выдающегося французского математика Анри Картана представляет собой интересное явление в математической учебной литературе. Она посвящена одной из наиболее классических отраслей математики — теории функций комплексного переменного — и содержит лишь самые основные и элементарные факты этой теории. И тем не менее основное впечатление от книги — свежесть и новизна.

Казалось бы, что может быть традиционнее вейерштрассова подхода к изложению теории функций? Однако, предпослав теории степенных рядов в комплексной области чрезвычайно простое и элегантное изложение формальных степенных рядов, А. Картан сразу подчеркивает связи этой теории с современной алгеброй и топологией. Использование понятия дифференциальной формы и гомотопии очень освежает изложение теории интегрирования, а введение пространств $\mathscr{C}(D)$ и $\mathscr{H}(D)$ функций, соответственно непрерывных и аналитических в области D, указывает на связи с последними работами по функциональному анализу...

Такого рода примеров можно привести довольно много. Однако автор отнюдь не злоупотребляет модернизмами, напротив, он строго ограничивает число новых терминов и понятий.

Книга А. Картана очень хорошо отражает дух современной теории функций комплексного переменного — науки одновременно и классической и молодой, богатой связями и с конкретными физическими задачами и с самыми новыми отраслями теоретической математики. Читатель не найдет в книге ряда традиционных вещей: почти не рассматриваются отображения, осуществляемые элементарными функциями, теорема Руше дана лишь в упражнениях, разложения на простейшие дроби и в бесконечные произведения даются на примерах и т. п. Однако в последнее время в университетском преподавании усиливаются тенденции сокращения основных курсов за счет освобождения их от деталей с тем, чтобы яснее выделить основные идеи. И курс Анри Картана, на наш взгляд, является отличным примером того, как эти тенденции следует осуществлять.

Можно надеяться, что читатели русского издания получат от книги такое же удовольствие, какое испытали переводчики и редакторы, работая над подготовкой этого издания.

Б. В. Шабат

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга повторяет с некоторыми добавлениями курс лекций, читанный на факультете наук в Париже в рамках программы для лиценциатов в 1957/1958, 1958/1959 и 1959/1960 учебных годах. Она посвящена, главным образом, теории функций одного комплексного переменного. Случай многих действительных или комплексных переменных, тем не менее, затрагивается в гл. IV с той целью, чтобы, во-первых, стало возможным рассматривать гармонические функции двух действительных переменных как аналитические функции и, во-вторых, доказать в гл. VII теорему существования решения системы дифференциальных уравнений с аналитическими правыми частями и начальными условиями.

Содержание этой книги перекрывает ту часть программы экзамена по курсу «Математика II», которая посвящена аналитическим функциям. Этот круг вопросов ранее входил в курс «Дифференциальное и интегральное исчисление».

Детали программ лиценциатских экзаменов не являются твердо установленными, и лектор обычно сохраняет достаточно большую свободу в выборе материала для своего курса. Эта свобода не ограничивается практически ничем, кроме традиций; когда же речь идет о теории функций комплексного переменного, следует сказать, что эти традиции во Франции хорошо установлены. Мне, вероятно, остается только указать, в какой мере я отошел от них.

Прежде всего, я предпочел начать изложение не с точки зрения Коши (дифференцируемые функции и интеграл Коши), а с точки зрения Вейерштрасса, т. е. с теории сходящихся степенных рядов (гл. I). Этому предшествует сжатое изложение теории формальных операций над степенными рядами — того, что в наши дни называется теорией формальных степенных рядов. Кроме того, я обновил традиции, посвятив два параграфа гл. VI систематическому, хотя и совершенно элементарному изложению теории абстрактных «аналитических пространств» (комплексной размерности 1). Мы называем здесь «аналитическим пространством» то, что раньше называли и часто называют еще сейчас «римановой поверхностью». Мы, однако, предпочитаем сохранить название римановой поверхности для обозначения совокупности аналитического пространства и голоморфного отображения этого пространства в комплексную плоскость (или в другое аналитическое пространство). Таким образом, с желаемой ясностью устанавливается различие между двумя этими понятиями, что невозможно в классической терминологии.

При рассмотрении такой классической темы, как теория функций комплексного переменного, которой посвящено и посвящается столько трактатов во всех странах, не может быть и речи о претензии на оригинальность. Если настоящая книга и отличается чем-либо от предшествующих ей во Франции, то может быть тем, что мы следуем в ней недавнему, но все более распространяющемуся принципу: математический текст должен содержать точные формулировки всех предложений и теорем, которых достаточно для понимания последующих формулировок и на которые в любой момент можно было бы сослаться. Не считая немногочисленных ясно оговоренных исключений, приведены полные доказательства всех сформулированных в тексте утверждений.

Довольно тонкие вопросы плоской топологии, возникающие в связи с интегралом Коши и изучением многозначных функций, смело рассмотрены в гл. II. Думается, что здесь, как и ранее, несколько точных формулировок предпочтительнее обращения к смутной интуиции и расплывчатым идеям. При изложении этих вопросов меня вдохновляла прекрасная книга Л. Альфорса (Complex Analysis), хотя я и не следовал полностью точкам зрения, которые там развиваются. Что же касается основных понятий общей топологии, то они предполагаются известными читателю и используются во многих местах этой книги; в самом деле, этот курс рассчитан на студентов, изучающих курс «Математика II» и уже изучивших, в принципе, курс «Математика I».

Я выражаю горячую признательность господину Р. Такахаси, который, имея большой опыт в проведении практических занятий со студентами, любезно дополнил главы этой книги формулировками упражнений и задач. Мы надеемся, что читатель с их помощью будет иметь возможность удостовериться в том, что он понял и усвоил теоретические понятия, изложенные в тексте.

Анри Картан

Ди (Дром), 4 августа 1960 года.

Глава I

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ ОТ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. ФОРМАЛЬНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. Алгебра полиномов. Пусть K — коммутативное поле. Мы будем рассматривать формальные полиномы от одного символа (или «неизвестной») X с коэффициентами из K, пока не придавая X конкретного смысла. Операции сложения двух полиномов и умножения полинома на «скаляр» (т. е. на элемент из поля K) превращают множество $K[X]$ таких полиномов в *векторное пространство* над K, которое обладает бесконечным базисом

$$1,\ X,\ X^2,\ \ldots,\ X^n,\ \ldots .$$

Каждый полином представляет собой конечную линейную комбинацию символов X^n с коэффициентами из K, т. е. может быть записан в виде $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, где в бесконечной последовательности коэффициентов a_n все элементы, за исключением конечного числа, равны нулю. Таблица умножения

$$X^p \cdot X^q = X^{p+q}$$

определяет некоторое умножение в $K[X]$; произведение

$$\Big(\sum_p a_p X^p\Big)\cdot\Big(\sum_q b_q X^q\Big)$$

равно $\sum\limits_n c_n X^n$, где

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p \cdot b_q. \tag{1.1}$$

Это умножение коммутативно и ассоциативно. Оно также билинейно, в том смысле, что для любых полиномов P_1, P_2, P, Q и скаляра λ имеют место равенства:

$$\left.\begin{aligned} (P_1 + P_2)\cdot Q &= P_1 Q + P_2 Q,\\ (\lambda P)\cdot Q &= \lambda\cdot(PQ). \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Для этого умножения существует единичный элемент (который мы будем обозначать 1), а именно полином $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$, у которого $a_0 = 1$, $a_n = 0$ при $n > 0$.

Совокупность перечисленных свойств означает, что множество $K[X]$, обладающее структурой векторного пространства и таким умножением, является *коммутативной алгеброй* с единицей над полем K; в частности, оно является коммутативным кольцом с единицей.

2. Алгебра формальных рядов. Формальный степенной ряд от X представляет собой формальное выражение $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$, причем на этот раз не предполагается, что все коэффициенты a_n, за исключением конечного числа, равны нулю. Сумма двух формальных рядов определяется по формуле

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n\right) + \left(\sum_{n \geq 0} b_n X^n\right) = \sum_{n \geq 0} c_n X^n, \quad \text{где } c_n = a_n + b_n,$$

а произведение формального ряда на скаляр — по формуле

$$\lambda\left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n\right) = \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n) X^n.$$

Множество $K[[X]]$ формальных степенных рядов является векторным пространством над K. Обозначим символом 0 элемент этого пространства, прибавление которого к любому формальному ряду не изменяет последнего; это формальный ряд, все коэффициенты которого равны нулю.

Произведение двух формальных рядов, так же как и произведение двух полиномов, определяется при помощи формулы (1.1), которая сохраняет смысл, так как в ней для каждого n коэффициент c_n определяется как сумма конечного числа слагаемых. Умножение и в этом случае коммутативно, ассоциативно и билинейно по отношению к операциям векторного пространства. Множество $K[[X]]$, так же как и множество $K[X]$, представляет собой алгебру над полем K с единичным элементом, обозначаемым 1 (им является ряд $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$, такой, что $a_0 = 1$, $a_n = 0$ при $n > 0$).

Алгебра $K[X]$ отождествляется с подалгеброй алгебры $K[[X]]$, состоящей из формальных рядов, все коэффициенты которых, за исключением конечного числа, равны нулю.

3. Порядок формального ряда. Пусть $S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$; для сокращения вместо $S(X)$ будем писать просто S. *Порядок* $\omega(S)$ ряда S есть целое число, определенное при $S \neq 0$ как наименьший индекс n, для которого $a_n \neq 0$. Говорят, что формальный ряд S является рядом порядка, не меньшего k, если он либо равен нулю, либо $\omega(S) \geqslant k$. Для простоты будем считать, что последнее неравенство имеет место и при $S = 0$, хотя в этом случае число $\omega(S)$ не определено.

Замечание. Можно условиться, что $\omega(0) = +\infty$.

Ряды S порядка, не меньшего k (k — данное целое число), просто представляют собой ряды $\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$, у которых $a_n = 0$ при $n < k$. Такие ряды образуют векторное подпространство пространства $K[[X]]$.

Определение. Семейство формальных рядов $\{S_i(X)\}_{i \in I}$, где I — некоторое множество индексов, называется *суммируемым*, если для любого целого k неравенство $\omega(S_i) \geqslant k$ имеет место для всех индексов i, за исключением конечного числа. По определению, *сумма* суммируемого семейства формальных рядов

$$S_i(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_{n,i} X^n$$

есть ряд

$$S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n,$$

где $a_n = \sum_i a_{n,i}$ для каждого n. Сумма $\sum_i a_{n,i}$ имеет смысл, так как, по предположению, элементы $a_{n,i}$ при фиксированном n равны нулю для всех значений i, за исключением конечного числа. Операция сложения формальных рядов, составляющих суммируемое семейство, является обобщением операции сложения конечного числа формальных рядов, определяемой векторной структурой $K[[X]]$. Такое обобщенное сложение коммутативно и ассоциативно в смысле, который легко может быть уточнен читателем.

Теперь можно придать смысл знаку суммы в формальном обозначении $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$.

Действительно, условимся называть *мономом* степени p формальный ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, в котором $a_n = 0$ при $n \neq p$; такой моном обозначим через $a_p X^p$. Семейство мономов

$$\{a_n X^n\}_{n \in N}$$

(через N обозначено множество целых чисел, больших или равных 0), очевидно, суммируемо, и его сумма есть формальный ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$.

Замечание. Произведение

$$\left(\sum_p a_p X^p\right) \cdot \left(\sum_q b_q X^q\right)$$

двух формальных рядов есть не что иное, как сумма суммируемого семейства, образованного произведениями

$$(a_p X^p) \cdot (b_q X^q) = (a_p b_q)\, X^{p+q}$$

мономов первого ряда на мономы второго ряда.

Предложение 3.1. *Кольцо* $K[[X]]$ *является областью целостности* (это означает, что из $S \neq 0$ и $T \neq 0$ следует $ST \neq 0$).

Доказательство. Предположим, что $S(X) = \sum\limits_p a_p X^p$ и $T(X) = \sum\limits_q b_q X^q$ — формальные ряды, не равные нулю. Пусть $p_0 = \omega(S)$, $q_0 = \omega(T)$, и пусть

$$S(X) \cdot T(X) = \sum_n c_n X^n.$$

Очевидно, что $c_n = 0$ для $n < p_0 + q_0$ и $c_{p_0+q_0} = a_{p_0} \cdot b_{q_0}$. Так как K — поле, $a_{p_0} \neq 0$ и $b_{q_0} \neq 0$, то и $c_{p_0+q_0} \neq 0$. Следовательно, $S \cdot T$ не равно нулю. Кроме того, мы доказали, что

$$\omega(ST) = \omega(S) + \omega(T) \quad \text{для } S \neq 0,\ T \neq 0. \tag{3.1}$$

Замечание. Можно рассматривать формальные ряды с коэффициентами из коммутативного кольца A с единицей (не обязательно из поля K). Из доказательства предложения 3.1 ясно, что *если A — область целостности, то и $A[[X]]$ — область целостности.*

4. Подстановка одного формального ряда в другой. Рассмотрим два формальных ряда

$$S(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n, \quad T(Y)=\sum_{p\geqslant 0} b_p Y^p.$$

Предположим, что $b_0=0$, т. е. что $\omega(T)\geqslant 1$ (*это предположение существенно*). Сопоставим каждому моному $a_n X^n$ формальный ряд $a_n(T(Y))^n$, где возведение в степень n и умножение на скаляр a_n имеют смысл, так как формальные ряды от Y образуют алгебру $K[[Y]]$.

Так как $b_0=0$, то порядок $a_n(T(Y))^n$ больше или равен n; следовательно, семейство, состоящее из элементов $a_n(T(Y))^n$, где n пробегает множество целых неотрицательных чисел, *суммируемо*, и можно рассмотреть формальный ряд

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(T(Y))^n, \tag{4.1}$$

который мы расположим по степеням Y.

Говорят, что этот формальный ряд от Y получен *подстановкой* $T(Y)$ вместо X в ряд $S(X)$; он обозначается $S(T(Y))$, или, если не имеет значения наименование неизвестного, просто $S\circ T$. Проверка следующих соотношений предоставляется читателю:

$$\left.\begin{aligned}(S_1+S_2)\circ T&=S_1\circ T+S_2\circ T,\\ (S_1S_2)\circ T&=(S_1\circ T)(S_2\circ T),\\ 1\circ T&=1.\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Мы не утверждаем, однако, что $S\circ(T_1+T_2)$ равно $S\circ T_1+$ $+S\circ T_2$.

Соотношения (4.2) означают, что для данного T (порядка, большего или равного 1) отображение $S\to S\circ T$ есть *гомоморфизм* кольца $K[[X]]$ в кольцо $K[[Y]]$, переводящий единичный элемент в единичный элемент.

Замечание. Если в ряд $S(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ подставить 0 вместо X, то получим формальный ряд a_0, сводящийся к «свободному члену».

Если дано суммируемое семейство формальных рядов S_i и если $\omega(T)\geqslant 1$, то семейство $\{S_i\circ T\}$ также суммируемо и имеет место равенство

$$\Big(\sum_i S_i\Big)\circ T=\sum_i (S_i\circ T), \tag{4.3}$$

обобщающее первое из равенств (4.2).

В самом деле, пусть

$$S_i(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_{n,\,i}X^n;$$

имеем

$$\sum_i S_i(X)=\sum_{n\geqslant 0}\Big(\sum_i a_{n,\,i}\Big)X^n,$$

откуда

$$\Big(\sum_i S_i\Big)\circ T=\sum_{n\geqslant 0}\Big(\sum_i a_{n,\,i}\Big)(T(Y))^n, \tag{4.4}$$

в то время как

$$\sum_i S_i\circ T=\sum_i\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_{n,\,i}(T(Y))^n\Big). \tag{4.5}$$

Для доказательства равенства правых частей (4.4) и (4.5) достаточно заметить, что в каждой из них коэффициент при Y^p представляет собой сумму конечного числа коэффициентов $a_{n,\,i}$, и воспользоваться ассоциативностью (конечного) сложения в поле K.

Предложение 4.1. *Если* $\omega(T)\geqslant 1$ *и* $\omega(U)\geqslant 1$, *то*

$$(S\circ T)\circ U=S\circ(T\circ U). \tag{4.6}$$

Иными словами, такая подстановка ассоциативна.

Доказательство. Если S — моном, то соотношение (4.6) равносильно равенству

$$T^n\circ U=(T\circ U)^n, \tag{4.7}$$

которое может быть получено индукцией по n из второго из соотношений (4.2).

Общий случай формулы (4.6) сводится к этому, если рассматривать ряд S как бесконечную сумму мономов $\sum\limits_n a_n X^n$. По определению,

$$S \circ T = \sum_{n \geqslant 0} a_n T^n,$$

откуда вследствие (4.3) имеем

$$(S \circ T) \circ U = \sum_{n \geqslant 0} a_n (T^n \circ U),$$

что, в силу (4.7), равно

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n (T \circ U)^n = S \circ (T \circ U),$$

а это и требовалось доказать.

5. Обратный элемент в кольце формальных рядов. Непосредственно проверяется, что в кольце $K[[Y]]$ имеет место тождество

$$(1 - Y)(1 + Y + \ldots + Y^n + \ldots) = 1. \tag{5.1}$$

Следовательно, для ряда $1 - Y$ в кольце $K[[Y]]$ существует обратный элемент.

Предложение 5.1. *Для того чтобы элемент* $S(X) = \sum\limits_n a_n X^n$ *обладал обратным элементом относительно умножения в* $K[[X]]$, *необходимо и достаточно, чтобы* a_0 *было отлично от нуля, т. е. чтобы* $S(0) \neq 0$.

Доказательство. Необходимость этого условия следует из того, что если

$$T(X) = \sum_n b_n X^n \quad \text{и} \quad S(X)\, T(X) = 1,$$

то $a_0 b_0 = 1$, откуда $a_0 \neq 0$.

Обратно, предположим, что $a_0 \neq 0$; мы покажем, что для ряда $(a_0)^{-1} S(X) = S_1(X)$ существует обратный ряд $T_1(X)$; отсюда следует, что обратным к ряду $S(X)$ является ряд $(a_0)^{-1} T_1(X)$. В самом деле,

$$S_1(X) = 1 - U(X), \quad \text{где } \omega(U) \geqslant 1;$$

поэтому ряд $U(X)$ можно подставить в тождество (5.1) вместо Y. Следовательно, ряд $1-U(X)$ обратим, что и требовалось доказать.

Замечание. Алгебру $K[X]$ полиномов можно вложить в алгебру $K[[X]]$ формальных рядов. Мы видим, что для любого полинома $Q(X)$, такого, что $Q(0)\neq 0$, в кольце $K[[X]]$ существует обратный элемент. Это кольцо содержит, следовательно, все частные вида $P(X)/Q(X)$, где $P(X)$ и $Q(X)$ — полиномы, такие, что $Q(0)\neq 0$.

6. Производная от формального ряда. Пусть $S(X) = \sum_n a_n X^n$; его *производной* называется ряд

$$S'(X)=\sum_{n>0} n a_n X^{n-1}. \tag{6.1}$$

Для производной S' мы будем употреблять также обозначение $\frac{dS}{dX}$ или еще $\frac{d}{dX}S$. Производная суммы (конечной или бесконечной) равна сумме производных. Отображение $S\to S'$ есть линейное отображение $K[[X]]$ в себя. Далее, производная произведения двух рядов вычисляется по следующей формуле:

$$\frac{d}{dX}(ST)=\frac{dS}{dX}T+S\frac{dT}{dX}. \tag{6.2}$$

Действительно, достаточно проверить эту формулу для случая, когда S и T — мономы, а это делается непосредственно.

Пусть $S(0)\neq 0$ и T — ряд, обратный к S (см. п. 5). Из формулы (6.2) получаем тогда, что

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{1}{S}\right)=-\frac{1}{S^2}\frac{dS}{dX}. \tag{6.3}$$

По индукции определяются *производные высших порядков* формального ряда. Если $S(X)=\sum a_n X^n$, то производная порядка n равна

$$S^{(n)}(X)=n!\,a_n+\text{члены степени}\geqslant 1.$$

Следовательно,

$$S^{(n)}(0)=n!a_n, \tag{6.4}$$

где через $S^{(n)}(0)$ обозначается результат подстановки ряда 0 в ряд $S^{(n)}(X)$.

7. Обращение рядов. Ряд $I(X)$, который определяется равенством $I(X) = X$, является единичным элементом для композиции формальных рядов:

$$S \circ I = S = I \circ S.$$

Предложение 7.1. *Пусть дан формальный ряд S; для того чтобы существовал формальный ряд T, такой, что*

$$T(0) = 0, \quad S \circ T = I, \tag{7.1}$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$S(0) = 0, \quad S'(0) \neq 0. \tag{7.2}$$

При этих условиях T определяется единственным образом и, кроме того, $T \circ S = I$. Иными словами, ряд T обратен ряду S относительно композиции $\circ$.

Доказательство. Пусть

$$S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n, \quad T(Y) = \sum_{n \geqslant 1} b_n Y^n.$$

Если

$$S(T(Y)) = Y, \tag{7.3}$$

то, сравнивая первые и вторые коэффициенты этих рядов, получаем, что

$$a_0 = 0, \quad a_1 b_1 = 1. \tag{7.4}$$

Следовательно, условия (7.2) являются необходимыми.

Теперь предположим, что они выполнены. В левой части равенства (7.3) коэффициент при Y^n равен нулю; он равен коэффициенту при Y^n в ряде

$$a_1 T(Y) + a_2 (T(Y))^2 + \ldots + a_n (T(Y))^n,$$

откуда получаем соотношение

$$a_1 b_n + P_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = 0, \tag{7.5}$$

где P_n — некоторый определенный полином с целыми неотрицательными коэффициентами, линейный по $a_2, \ldots, a_n$. Так как $a_1 \neq 0$, второе из соотношений (7.4) позволяет вычислить b_1; для $n \geqslant 2$ коэффициент b_n находится из соотношения (7.5) индукцией по n. Отсюда следует существование и единственность формального ряда $T(Y)$.

Полученный ряд удовлетворяет условиям $T(0) = 0$ и $T'(0) \neq 0$; следовательно, применяя к T результат, доказанный нами для S, мы получаем, что существует формальный ряд S_1, такой, что

$$S_1(0) = 0; \qquad T \circ S_1 = I.$$

Отсюда

$$S_1 = I \circ S_1 = (S \circ T) \circ S_1 = S \circ (T \circ S_1) = S \circ I = S.$$

Следовательно, S_1 есть не что иное, как S. Поэтому $T \circ S = I$, что и требовалось. Предложение 7.1 доказано.

Примечание. Так как $S(T(Y)) = Y$ и $T(S(X)) = X$, то можно сказать, что «формальные преобразования»

$$Y = S(X), \quad X = T(Y)$$

взаимно обратны. Поэтому ряд T называется «обратным относительно композиции» или просто «обратным» ряду S.

Предложение 7.1 есть своего рода «теорема о неявной формальной функции».

§ 2. СХОДЯЩИЕСЯ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. Поле комплексных чисел. В дальнейшем под полем K будет пониматься либо поле $\mathbf{R}$ действительных чисел, либо поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел.

Напомним, что комплексное число $z = x + iy$ (x и y вещественны) можно представлять себе как точку плоскости $\mathbf{R}^2$ с координатами x и y. Сопоставляя каждому $z = x + iy$ его «комплексно сопряженное» $\bar{z} = x - iy$, мы определяем, в силу соотношений

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}',$$

автоморфизм $z \to \bar{z}$ поля $\mathbf{C}$. Сопряженное к $\bar{z}$ снова есть z. Иначе говоря, преобразование $z \to \bar{z}$ *инволютивно*, т. е. совпадает со своим обратным.

Мы определим *норму* (или *абсолютную величину*, или *модуль*) $|z|$ комплексного числа z формулой

$$|z| = (z \cdot \bar{z})^{1/2}.$$

Норма обладает следующими свойствами:

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|, \quad |zz'| = |z| \cdot |z'|, \quad |1| = 1.$$

Норма $|z|$ всегда неотрицательна и равна нулю только при $z = 0$. Эта норма позволяет определить *метрику* в поле $\mathbf{C}$: расстояние между z и z' полагается равным $|z - z'|$; введенная метрика есть не что иное, как евклидова метрика в плоскости $\mathbf{R}^2$. Относительно этой метрики $\mathbf{C}$ является *полным* пространством; это означает, что справедлив *критерий Коши*: последовательность точек $z_n \in \mathbf{C}$ имеет предел тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} |z_m - z_n| = 0.$$

Из критерия Коши выводится как следствие хорошо известная теорема: если $\sum\limits_n u_n$ — ряд комплексных чисел и $\sum\limits_n |u_n| < +\infty$, то этот ряд сходится (говорят тогда, что он абсолютно сходится). Более того,

$$\left| \sum_n u_n \right| \leqslant \sum_n |u_n|.$$

Мы всегда будем отождествлять поле $\mathbf{R}$ с подполем поля $\mathbf{C}$, а именно с подполем, образованным теми z, для которых $\bar{z} = z$. Норма в поле $\mathbf{C}$ индуцирует на $\mathbf{R}$ норму, которая есть не что иное, как абсолютная величина действительного числа. Поле $\mathbf{R}$ также полно. В дальнейшем норма в полях $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$ будет играть существенную роль.

Введем обозначения:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

(«действительная» и «мнимая» части числа $z \in \mathbf{C}$).

2. Обзор понятий, относящихся к сходимости функциональных рядов. (По поводу вводимых здесь понятий см.

J. Dixmier, Cours de Mathématiques I, Cours de l'A. C. E. S., Topologie, chapitre VI, § 9.)[1])

Мы будем рассматривать функции, определенные на некотором множестве E и принимающие действительные или комплексные значения (можно вообще рассматривать функции, принимающие значения в полном нормированном векторном пространстве; ср. цитированную выше книгу). Для каждой функции u обозначим

$$\|u\| = \sup_{x \in E} |u(x)|.$$

Это неотрицательное число, которое может обращаться в бесконечность. Очевидно, если $\|u\| < +\infty$ и $\|v\| < +\infty$, то

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \quad \text{и} \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$$

для всех скаляров λ; иными словами, $\|u\|$ есть *норма* на векторном пространстве функций u, таких, что $\|u\| < +\infty$.

Говорят, что функциональный ряд u_n *нормально сходится*, если ряд норм $\sum\limits_n \|u_n\|$ представляет собой сходящийся ряд, или, иначе говоря, $\sum\limits_n \|u_n\| < +\infty$. Отсюда вытекает, что для каждого $x \in E$ ряд $\sum\limits_n |u_n(x)|$ сходится и, следовательно, ряд $\sum\limits_n u_n(x)$ абсолютно сходится. Более того, обозначив сумму последнего ряда через $v(x)$, мы получим

$$\|v\| \leqslant \sum_n \|u_n\|, \quad \lim_{p \to \infty} \Big\| v - \sum_{n=0}^{p} u_n \Big\| = 0.$$

Последнее соотношение означает, что частные суммы $\sum\limits_{n=0}^{p} u_n$ *равномерно* сходятся к v при p, стремящемся к бесконечности. Таким образом, *всякий нормально сходящийся ряд сходится равномерно.*

Пусть A — подмножество множества E; говорят, что ряд $\sum\limits_n u_n$ нормально сходится при $x \in A$, если ряд функций

$$u'_n = u_n \mid A \quad (\text{сужение } u_n \text{ на множество } A)$$

[1]) См. также Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, ИЛ, 1964.—*Прим. ред.*

сходится нормально. Это равносильно тому, что на A каждый из модулей $|u_n(x)|$ не превосходит некоторой константы $\varepsilon_n \geqslant 0$, причем ряд $\sum\limits_n \varepsilon_n$ сходится.

Напомним, что предел равномерно сходящейся последовательности функций, непрерывных на некотором топологическом пространстве E, есть непрерывная функция. В частности, *сумма нормально сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна*, т. е. можно сформулировать такое утверждение.

Предложение 2.1. *Предположим, что для каждого n предел $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x)$ существует и равен a_n. Предположим также, что ряд $\sum\limits_n u_n$ нормально сходится. Тогда ряд $\sum\limits_n a_n$ сходится и имеет место равенство*

$$\sum_n a_n = \lim_{x \to x_0} \Big(\sum_n u_n(x)\Big)$$

(перестановочность суммирования с предельным переходом).

3. Область сходимости степенного ряда. Коэффициенты всех степенных рядов, которые мы будем рассматривать, принадлежат одному из полей $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Отметим, что все изложенное ниже справедливо в более общем случае поля, каждому элементу x которого сопоставлено действительное число $|x| \geqslant 0$, такое, что

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \quad |xy| = |x| \cdot |y|,$$
$$|x| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = 0,$$

и существует отличный от нуля элемент x, для которого $|x| \neq 1$.

Пусть $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ — некоторый формальный ряд с коэффициентами из $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Заменим букву X элементом z соответствующего поля; в результате мы получаем «значение» ряда $S(z)$, которое является элементом поля. Такая подстановка возможна, разумеется, при условии, что ряд $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ сходится. На самом деле мы ограничимся случаем, когда он *сходится абсолютно*.

Более точно, введем действительную переменную $r \geqslant 0$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n,$$

члены которого — неотрицательные числа. Он называется *рядом, ассоциированным с рядом* $S(X)$. Его сумма — неотрицательное число или бесконечность. Множество всех тех $r \geqslant 0$, для которых

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n < +\infty,$$

образует, очевидно, интервал на полупрямой $\mathbf{R}^+$, причем этот интервал заведомо не пуст, поскольку ряд сходится при $r = 0$. Этот интервал может быть замкнутым справа или открытым, конечным или бесконечным, может сводиться к единственной точке 0. Во всех этих случаях через ρ обозначим длину этого интервала; таким образом, ρ представляет собой конечное или бесконечное неотрицательное число, которое может равняться нулю. Это число называется *радиусом сходимости* формального ряда $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$. Множество комплексных чисел z, для которых $|z| < \rho$, называется *кругом сходимости* степенного ряда; это открытое множество, пустое при $\rho = 0$. Если в качестве поля коэффициентов выбрано поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, то это множество геометрически представляет собой круг.

Предложение 3.1.

а) *Для любого* $r < \rho$ *ряд* $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *нормально сходится при* $|z| \leqslant r$; *в частности, этот ряд абсолютно сходится для каждого* z, *модуль которого меньше* ρ;

б) *ряд* $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *расходится при* $|z| > \rho$ (*для случая* $|z| = \rho$ *ничего не утверждается*).

Доказательство. Предложение 3.1 вытекает из следующей леммы.

Лемма Абеля. *Пусть действительные числа* r *и* r_0 *таковы, что* $0 < r < r_0$. *Если существует конечное* *число* $M > 0$, *такое, что*

$$|a_n| r_0^n \leqslant M \text{ для всех целых } n \geqslant 0,$$

то ряд $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *нормально сходится при* $|z| \leqslant r$.

В самом деле, $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n \leqslant M(r/r_0)^n$, а ряд с общим членом $\varepsilon_n = M(r/r_0)^n$ представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $r/r_0 < 1$ и, следовательно, сходится.

Теперь докажем утверждение а) предложения 3.1. Пусть $r < \varrho$. Выберем r_0 таким образом, что $r < r_0 < \varrho$; поскольку ряд $\sum\limits_{n \geqslant 0} |a_n| r_0{}^n$ сходится, все его члены не превосходят одного и того же числа M, и из леммы Абеля вытекает нормальная сходимость ряда $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ для $|z| \leqslant r$.

Остается доказать утверждение б). Пусть $|z| > \varrho$; тогда можно подобрать число n, чтобы $|a_n z^n|$ был сколь угодно велик. В противном случае по лемме Абеля ряд $\sum\limits_{n \geqslant 0} |a_n| r'^n$ сходится для любого r', такого, что $\varrho < r' < |z|$, что противоречит определению ϱ.

Формула для вычисления радиуса сходимости (Адамар).

Мы докажем следующую формулу:

$$1/\varrho = \varlimsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}. \tag{3.1}$$

Напомним сначала определение верхнего предела последовательности действительных чисел u_n:

$$\varlimsup_{n \to \infty} u_n = \lim_{p \to \infty} (\sup_{n \geqslant p} u_n).$$

Для того чтобы доказать (3.1), мы воспользуемся классическим критерием сходимости: пусть дана последовательность чисел $v_n \geqslant 0$; если $\varlimsup\limits_{n \to \infty} v_n{}^{1/n} < 1$, то $\sum\limits_n v_n < +\infty$; если же $\varlimsup\limits_{n \to \infty} v_n{}^{1/n} > 1$, то $\sum\limits_n v_n = +\infty$ («правило Коши», которое доказывается путем сравнения ряда $\sum\limits_n v_n$ с геометрической прогрессией). Положим $v_n = |a_n| r^n$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, v_n^{1/n} = r\,(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |a_n|^{1/n}).$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_n |a_n| r^n$ сходится при $1/r > \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |a_n|^{1/n}$ и расходится при $1/r < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |a_n|^{1/n}$. Формула (3.1) доказана.

Некоторые примеры.

1) Ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} n! z^n$ имеет радиус сходимости, равный нулю.

2) Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n$ бесконечен.

3) У каждого из рядов $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n} z^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2} z^n$ радиус сходимости равен 1. Можно проверить, однако, что эти ряды ведут себя по-разному при $|z| = 1$.

4. Сложение и умножение сходящихся степенных рядов.

Предложение 4.1. *Пусть $A(X)$ и $B(X)$ — два формальных степенных ряда, радиус сходимости которых больше или равен ϱ. Пусть*

$$S(X) = A(X) + B(X) \quad \text{и} \quad P(X) = A(X)\cdot B(X)$$

— их сумма и произведение. Тогда

а) *ряды $S(X)$ и $P(X)$ имеют радиус сходимости, больший или равный ϱ;*

б) *для $|z| < \varrho$*

$$S(z) = A(z) + B(z), \quad P(z) = A(z)\cdot B(z). \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть

$$A(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n; \quad B(X) = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n;$$

$$S(X) = \sum_{n\geqslant 0} c_n X^n; \quad P(X) = \sum_{n\geqslant 0} d_n X^n.$$

Положим

$$\gamma_n = |a_n| + |b_n|; \quad \delta_n = \sum_{0\leqslant p\leqslant n} |a_p|\cdot|b_{n-p}|.$$

Тогда $|c_n| \leqslant \gamma_n$, $|d_n| \leqslant \delta_n$. Если $r < \varrho$, то ряды $\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n$ и $\sum_{n \geqslant 0} |b_n| r^n$ сходятся; поэтому

$$\sum_{n \geqslant 0} \gamma_n r^n = \Big(\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n\Big) + \Big(\sum_{n \geqslant 0} |b_n| r^n\Big) < +\infty,$$

$$\sum_{n \geqslant 0} \delta_n r^n = \Big(\sum_{p \geqslant 0} |a_p| r^p\Big) \cdot \Big(\sum_{q \geqslant 0} |b_q| r^q\Big) < +\infty.$$

Следовательно, ряды $\sum_{n \geqslant 0} |c_n| r^n$ и $\sum_{n \geqslant 0} |d_n| r^n$ сходятся; таким образом, никакое число r, меньшее ϱ, не превосходит ни радиуса сходимости ряда $S(X)$, ни радиуса сходимости ряда $P(X)$. Следовательно, оба радиуса сходимости не меньше ϱ.

Осталось доказать два соотношения (4.1). Первое из них очевидно, второе следует из классической теоремы, которую мы сейчас напомним.

Предложение 4.2. *Пусть* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *и* $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ — *два абсолютно сходящихся ряда. Положим*

$$w_n = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n} u_p v_{n-p}.$$

Ряд $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ *сходится абсолютно и его сумма равна произведению*

$$\Big(\sum_{p \geqslant 0} u_p\Big) \cdot \Big(\sum_{q \geqslant 0} v_q\Big).$$

В самом деле, положим $\alpha_p = \sum_{n \geqslant p} |u_n|$, $\beta_q = \sum_{n \geqslant q} |v_n|$; имеем соотношение

$$\sum_{n \geqslant 0} |w_n| \leqslant \sum_{p \geqslant 0} \sum_{q \geqslant 0} |u_p| \cdot |v_q| = \alpha_0 \beta_0,$$

и, кроме того, если $m \geqslant 2n$, то модуль разности

$$\sum_{k \leqslant m} w_k - \Big(\sum_{k \leqslant n} u_k\Big) \cdot \Big(\sum_{k \leqslant n} v_k\Big)$$

не превосходит суммы всех тех произведений $|u_p| \cdot |v_q|$, в которых хотя бы один из индексов p и q больше n. Следовательно, модуль этой разности не превосходит $\alpha_0\beta_{n+1}+\alpha_{n+1}\beta_0$ и стремится поэтому к нулю, когда n стремится к бесконечности. Таким образом, $\sum\limits_{k\leqslant m} w_k$ стремится при $m\to\infty$ к произведению бесконечных сумм $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ и $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$.

5. Подстановка одного сходящегося ряда в другой. Пусть даны два формальных степенных ряда S и T, причем $T(0)=0$; тогда определен формальный степенной ряд $S\circ T$ (см. § 1, п. 4).

Предложение 5.1. *Пусть* $S(X)=\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nX^n$ *и* $T(X)=\sum\limits_{n\geqslant 1} b_nX^n$. *Если радиусы сходимости* $\varrho(S)$ *и* $\varrho(T)$ *рядов* S *и* T *оба отличны от нуля, то это же верно для радиуса сходимости ряда* $U=S\circ T$. *Более точно, существует* $r>0$, *такое, что* $\sum\limits_{n\geqslant 1} |b_n|r^n<\varrho(S)$. *Если же* r *обладает этим свойством, то радиус сходимости ряда* U *больше или равен* r *и для всех* z, *таких, что* $|z|\leqslant r$, *имеем*

$$|T(z)|<\varrho(S)$$

и

$$S(T(z))=U(z). \tag{5.1}$$

Доказательство. Для достаточно малого $r>0$ имеем $\sum\limits_{n\geqslant 1} |b_n|r^n<+\infty$, поскольку радиус сходимости ряда T отличен от нуля. Следовательно, $\sum\limits_{n\geqslant 1} |b_n|r^{n-1}<+\infty$, если r достаточно мало, и величина

$$\sum_{n\geqslant 1} |b_n|r^n=r\cdot\Big(\sum_{n\geqslant 1} |b_n|r^{n-1}\Big)$$

стремится к нулю при r, стремящемся к нулю. Поэтому существует $r>0$, такое, что $\sum\limits_{n\geqslant 1} |b_n|r^n<\varrho(S)$. Тогда

$$\sum_{p\geqslant 0} |a_p|\Big(\sum_{k\geqslant 1} |b_k|r^k\Big)^p<+\infty.$$

В то же время это ряд вида $\sum_{n\geqslant 0}\gamma_n r^n$, и если $U(X)=\sum_{n\geqslant 0}c_n X^n$, то, очевидно, $|c_n|\leqslant\gamma_n$. Таким образом, $\sum_{n\geqslant 0}|c_n|r^n<\infty$ и радиус сходимости ряда U больше или равен r.

Осталось доказать соотношение (5.1). Положим $S_n(X)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}a_k X^k$ и $S_n\circ T=U_n$. Так как отображение $T\to T(z)$ есть гомоморфизм колец, а S_n представляет собой полином, то при $|z|\leqslant r$ имеет место равенство

$$U_n(z)=S_n(T(z)).$$

Так как ряд S сходится в точке $T(z)$, то

$$S(T(z))=\lim_{n\to\infty}S_n(T(z)).$$

С другой стороны, коэффициенты ряда $U-U_n=(S-S_n)\circ T$ не превосходят коэффициентов ряда

$$\sum_{p>n}|a_p|\Big(\sum_{k\geqslant 1}|b_k|r^k\Big)^p,$$

сумма которого стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности. Отсюда вытекает что при $|z|\leqslant r$ разность $U(z)-U_n(z)$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности. Следовательно,

$$U(z)=\lim_{n\to\infty}U_n(z)=\lim_{n\to\infty}S_n(T(z))=S(T(z))\ \text{при}\ |z|\leqslant r.$$

Равенство (5.1) доказано.

Интерпретация соотношения (5.1). Предположим, что r — такое, как в формулировке предложения 5.1. Обозначим через $\widetilde{T}$ отображение $z\to T(z)$, определенное для $|z|\leqslant r$, через $\widetilde{S}$ и $\widetilde{U}$ — отображения, определенные таким же образом с помощью рядов S и U. Соотношение (5.1) показывает, что для $|z|\leqslant r$ композиция $\widetilde{S}\circ\widetilde{T}$ определена и равна $\widetilde{U}$. Следовательно, если радиусы сходимости рядов S и T отличны от нуля, то соотношение $U=S\circ T$ между формальными степенными рядами влечет за собой *для достаточно малых значений переменного z* соотношение $\widetilde{U}=\widetilde{S}\circ\widetilde{T}$.

6. Обратный элемент для сходящегося степенного ряда. Известно (§ 1, предложение 5.1), что если $S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$, причем $a_0 \neq 0$, то существует единственный формальный ряд $T(X)$, такой, что произведение $S(X)\,T(X)$ равно 1.

Предложение 6.1. *Если радиус сходимости формального степенного ряда S отличен от нуля и T — формальный степенной ряд, такой, что $ST = 1$, то радиус сходимости ряда T также отличен от нуля.*

Доказательство. Умножая $S(X)$ на подходящую постоянную, можно свести доказательство к случаю, когда $a_0 = 1$. Положим $S(X) = 1 - U(X)$; тогда $U(0) = 0$. Ряд $T(X)$, обратный $S(X)$ относительно умножения, можно получить, подставив $U(X)$ вместо Y в ряд $1 + \sum_{n \geqslant 0} Y^n$. Радиус сходимости последнего ряда равен единице и, следовательно, отличен от нуля; предложение 6.1 вытекает, таким образом, из предложения 5.1.

7. Производная сходящегося степенного ряда.

Предложение 7.1. *Пусть* $S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ — *формальный степенной ряд, и пусть*

$$S'(X) = \sum_{n \geqslant 0} n a_n X^{n-1}$$

— его производная (ср. § 1, п. 6). *Тогда ряды S и S' имеют одинаковый радиус сходимости. Кроме того, если их радиус сходимости ϱ отличен от нуля, то для $|z| < \varrho$ имеет место равенство*

$$S'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}. \tag{7.1}$$

Предварительное замечание. Если $|z| < \varrho$, то для достаточно малых h (а именно для $|h| < \varrho - |z|$) имеем также $|z+h| < \varrho$. Поэтому $S(z+h)$ определено. С другой стороны, в соотношении (7.1) считается, что h стремится к нулю, принимая вещественные значения, если полем коэффициентов является поле $\mathbf{R}$, и комплексные значения, если полем коэффициентов является поле $\mathbf{C}$. В случае поля $\mathbf{R}$ из соотношения (7.1) вытекает, что функция $z \to S(z)$ обладает *производной*, равной $S'(z)$; в случае поля $\mathbf{C}$ соотношение (7.1) вводит понятие *производной относительно комплексного переменного* z. Существование производной $S'(z)$, очевидно, в обоих случаях влечет за собой непрерывность функции $S(z)$ при $|z| < \varrho$, что можно доказать непосредственно.

Доказательство предложения 7.1. Положим $|a_n| = \alpha_n$ и обозначим через ϱ и ϱ' радиусы сходимости рядов S и S'. Если $r < \varrho'$, то ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\alpha_n r^{n-1}$ сходится; следовательно,

$$\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n r^n \leqslant r\Big(\sum_{n\geqslant 0} n\alpha_n r^{n-1}\Big) < +\infty$$

и, значит, $r \leqslant \varrho$. Обратно, пусть r — число, меньшее ϱ; выберем r', такое, что $r < r' < \varrho$; тогда

$$n\alpha_n r^{n-1} = \frac{1}{r'}(\alpha_n r'^n)\cdot n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}.$$

Так как $r' < \varrho$, то существует число $M > 0$, такое, что $\alpha_n r'^n \leqslant M$ для всех n, откуда

$$n\alpha_n r^{n-1} \leqslant \frac{M}{r'} n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1},$$

и так как ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\alpha_n r^{n-1}$ сходится; следовательно, $r \leqslant \varrho'$. Иными словами, если какое-нибудь число меньше ϱ', то оно меньше или равно ϱ, а если число меньше ϱ, то оно меньше или равно ϱ'. Отсюда $\varrho = \varrho'$.

Осталось доказать соотношение (7.1). Пусть z — элемент поля, такой, что $|z| < \varrho$. Выберем r таким образом, чтобы выполнялось неравенство $|z| < r < \varrho$, и положим

$$0 < |h| \leqslant r - |z|. \tag{7.2}$$

Тогда $S(z+h)$ определено, и имеет место равенство

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) = \sum_{n\geqslant 1} u_n(z, h), \tag{7.3}$$

где

$$u_n(z, h) = a_n\{(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \ldots + z^{n-1} - nz^{n-1}\}.$$

Так как $|z|$ и $|z+h|$ не превосходят r, то $|u_n(z, h)| \leqslant 2n\alpha_n r^{n-1}$; так как $r < \varrho$, то $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует число n_0, такое, что

$$\sum_{n > n_0} 2n\alpha_n r^{n-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим далее, что конечная сумма $\sum\limits_{n \leqslant n_0} u_n(z, h)$ представляет собой полином от h, равный нулю при $h = 0$; поэтому, если $|h|$ меньше некоторого подходящего числа η, то $\left|\sum\limits_{n \leqslant n_0} u_n(z, h)\right| \leqslant \varepsilon/2$. Таким образом, если h удовлетворяет условиям (7.2) и $|h| \leqslant \eta$, то из (7.3) вытекает, что

$$\left|\frac{S(z+h)-S(z)}{h} - S'(z)\right| \leqslant \left|\sum_{n \leqslant n_0} u_n(z, h)\right| + \sum_{n > n_0} 2n\alpha_n r^{n-1} \leqslant \varepsilon.$$

Соотношение (7.1) доказано.

Замечание. *Можно показать, что сходимость* $\frac{S(z+h)-S(z)}{h}$ к $S'(z)$ *равномерна* по z при $|z| \leqslant r$, где r — любое число, строго меньшее радиуса сходимости ϱ.

8. Вычисление коэффициентов степенного ряда. Пусть $S(X)$ — формальный степенной ряд, радиус сходимости ϱ которого отличен от нуля. Пусть $S(z)$ — сумма ряда $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ при $|z| < \varrho$. Это дифференцируемая функция, производной которой является $S'(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} na_n z^{n-1}$. К ряду S' можно снова применить предложение 7.1. При этом мы получим, что $S'(z)$ при $|z| < \varrho$ имеет производную $S''(z)$, которая является суммой степенного ряда $\sum\limits_{n \geqslant 0} n(n-1)a_n z^{n-2}$ с тем же радиусом сходимости ϱ.

Тем же путем можно доказать существование дальнейших производных. По индукции получаем, что $S(z)$ является при $|z| < \varrho$ *бесконечно дифференцируемой* функцией; ее производная порядка n есть

$$S^{(n)}(z) = n!\,a_n + T_n(z),$$

где T_n — ряд порядка, большего или равного единице, или, иначе говоря, $T_n(0) = 0$. Отсюда

$$a_n = \frac{1}{n!} S^n(0). \tag{8.1}$$

Эта фундаментальная формула показывает, в частности, что если функция $S(z)$ задана в сколь угодно малой окрестности нуля, то коэффициенты a_n степенного ряда S этим полностью определены. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Если функция $f(z)$ определена для z, модули которых достаточно малы, то существует *не более одного формального степенного ряда* $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ с радиусом сходимости, отличным от нуля, такого, что $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$, когда $|z|$ достаточно мало.

9. Обращение сходящихся степенных рядов. Понятие обратного относительно композиции формального степенного ряда было введено в п. 7 § 1. Там было дано необходимое и достаточное условие того, чтобы для данного формального степенного ряда существовал обратный (предложение 7.1).

Предложение 9.1. *Пусть S — степенной ряд, такой, что*

$$S(0) = 0, \qquad S'(0) \neq 0,$$

и T — ряд, обратный ряду S относительно композиции, т. е. степенной ряд, такой, что

$$T(0) = 0, \qquad S \circ T = I.$$

Если радиус сходимости ряда S отличен от нуля, то это же справедливо для ряда T.

Читатель может принять пока это предложение без доказательства, так как оно будет доказано позже из совершенно других соображений (гл. IV, § 5, предложение 6.1).

Здесь мы проведем для любознательного читателя непосредственное доказательство этого предложения, не выходящее за рамки теории степенных рядов. Для этого мы будем использовать понятие *мажорирующего ряда* (ср. гл. VII).

Восстановим обозначения доказательства предложения 7.1 из § 1 и рассмотрим формулу (7.5), которая была использована нами в том же параграфе для нахождения неизвестных коэффициентов b_n искомого ряда $T(X)$.

Одновременно с рядом $S(X)$ мы рассмотрим мажорирующий ряд, т. е. ряд

$$\bar{S}(X) = A_1X - \sum_{n \geqslant 2} A_nX^n,$$

коэффициенты A_n которого — действительные положительные числа, такие, что $|a_n| \leqslant A_n$ для всех n; кроме того, предположим, что $A_1 = |a_1|$. Согласно предложению 7.1 § 1, ряду $\bar{S}$ можно сопоставить ряд

$$\bar{T}(Y) = \sum_{n \geqslant 1} B_nY^n,$$

такой, что $\bar{S}(\bar{T}(Y)) = Y$; его коэффициенты B_n задаются соотношениями

$$A_1B_n - P_n(A_2, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_{n-1}) = 0, \tag{9.1}$$

аналогичными соотношениям (7.5) из § 1. С помощью индукции по n можно показать, что

$$|b_n| \leqslant B_n. \tag{9.2}$$

Отсюда следует, что радиус сходимости ряда T во всяком случае не меньше радиуса сходимости ряда $\bar{T}$. Если мы покажем, что последний положителен, то этим доказательство предложения 9.1 будет завершено.

Выберем ряд $\bar{S}$ следующим образом: пусть $r > 0$ — число, меньшее радиуса сходимости ряда S (по предположению, радиус сходимости ряда S отличен от нуля); тогда члены ряда $\sum_{n \geqslant 1} |a_n| r^n$ меньше одного и того же числа $M > 0$, и, положив

$$A_1 = |a_1|, \qquad A_n = \frac{M}{r^n} \quad \text{при} \quad n \geqslant 2, \tag{9.3}$$

получим значение коэффициентов мажорирующего ряда $\bar{S}$. Его сумма $\bar{S}(x)$ при $|x| < r$ равна

$$\bar{S}(x) = A_1x - M\,\frac{x^2/r^2}{1 - x/r}.$$

Найдем функцию $\bar{T}(y)$, определенную для достаточно малых y, обращающуюся в нуль при $y = 0$ и такую, что $\bar{S}(\bar{T}(y)) \equiv y$. Функция $\bar{T}(y)$ может быть найдена как решение квадратного уравнения

$$(A_1/r + M/r^2)\,\bar{T}^2 - (A_1 + y/r)\,\bar{T} + y = 0. \tag{9.4}$$

Решением этого уравнения, обращающимся в нуль при $y=0$, является функция

$$\overline{T}(y)=\frac{A_1+y/r-\sqrt{(A_1)^2-2A_1y/r-4My/r^2+y^2/r^2}}{2(A_1/r+M/r^2)}.$$

Когда $|y|$ достаточно мал, корень имеет вид $A_1\sqrt{1+u}$, где $|u|<1$; следовательно, $\overline{T}(y)$ допускает разложение в степенной ряд по y, сходящийся при достаточно малом $|y|$. Таким образом, радиус сходимости этого ряда отличен от нуля, что и требовалось доказать.

§ 3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

1. Экспоненциальная функция. Уже говорилось (§ 2, п. 3), что формальный ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}X^n$ имеет бесконечный радиус сходимости. Для комплексного z положим

$$e^z=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}z^n.$$

Таким образом, функция e^z есть сумма абсолютно сходящегося ряда. В силу предложения 7.1 из § 2, эта функция имеет производную

$$\frac{d}{dz}(e^z)=e^z. \tag{1.1}$$

С другой стороны, применяя предложение 4.2 из § 2 к двум рядам с общими членами

$$u_n=\frac{1}{n!}z^n, \qquad v_n=\frac{1}{n!}z'^n,$$

получаем равенство

$$w_n=\sum_{0\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{p!\,(n-p)!}z^pz'^{n-p}=\frac{1}{n!}(z+z')^n.$$

Следовательно,

$$e^{z+z'}=e^z\cdot e^{z'} \tag{1.2}$$

(основное функциональное свойство экспоненты), в частности

$$e^z\cdot e^{-z}=1. \tag{1.3}$$

Таким образом, e^z отлично от нуля при всех z. Положим $z = x + iy$ (x и y — действительные числа); тогда

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}.$$

Таким образом, изучение функции e^z сводится к изучению двух функций: e^x и e^{iy}, где x и y — действительные переменные. Имеют место равенства

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \text{и} \quad \frac{d}{dy}(e^{iy}) = ie^{iy}. \tag{1.4}$$

2. Действительная экспоненциальная функция e^x. Так как $e^x \neq 0$, то $e^x = (e^{x/2})^2 > 0$. Далее, $e^x > 1 + x$ при $x > 0$, поскольку $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$. Следовательно,

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty;$$

заменяя x на $-x$, получаем

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Таким образом, e^x — функция действительного переменного x, строго возрастающая от 0 до $+\infty$. Поэтому для преобразования $t = e^x$ существует обратное преобразование, определенное при $t > 0$; обозначим его

$$x = \log t.$$

Эта функция строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Из равенства (1.2) вытекает соотношение

$$\log(t \cdot t') = \log t + \log t' \tag{2.1}$$

и, в частности, $\log 1 = 0$.

С другой стороны, из теоремы о производной обратной функции получаем, что

$$\frac{d}{dt} \log t = \frac{1}{t}. \tag{2.2}$$

Заменим t на $1 + u$ ($u > -1$); $\log(1 + u)$ есть примитивная функции $\frac{1}{1+u}$, обращающаяся в нуль при $u = 0$.

Последняя представляется степенным рядом

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+\ldots+(-1)^{n-1}u^{n-1}+\ldots,$$

радиус сходимости которого равен 1. Вследствие предложения 7.1 из § 2 ряд, состоящий из примитивных, имеет тот же радиус сходимости, и его сумма имеет производную $\frac{1}{1+u}$; отсюда при $|u|<1$ имеем

$$\log(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}+\ldots. \quad (2.3)$$

(Фактически это разложение имеет место и при $u=1$.)

Положим теперь

$$S(X)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}X^n, \qquad T(Y)=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{Y^n}{n}, \quad (2.4)$$

и найдем ряд $U=S\circ T$. Вследствие предложения 5.1 из § 2 для $-1<u<+1$ имеет место равенство

$$U(u)=S(T(u)).$$

Между тем $T(u)=\log(1+u)$, $S(x)=e^x-1$; следовательно,

$$U(u)=e^{\log(1+u)}-1=(1+u)-1=u.$$

Таким образом, формальный ряд U есть не что иное, как I, вследствие единственности разложения функции в степенной ряд (см. § 2, п. 8).

Таким образом, ряды S и T *взаимно обратны относительно композиции.*

3. Мнимая экспоненциальная функция e^{iy} (y действительно). Разлагая e^{iy} в ряд, легко заметить, что e^{-iy} — комплексно сопряженное для e^{iy}; следовательно, $e^{iy}\cdot e^{-iy}$ равно квадрату модуля e^{iy}; но, в силу соотношения (1.3), это произведение равно единице. Таким образом,

$$|e^{iy}|=1.$$

Мы видим, что в плоскости, представляющей поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, точки e^{iy} лежат на *единичной окружности*, т. е. на окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Комплексные числа u, такие, что $|u| = 1$, образуют *группу* $\mathbf{U}$ относительно умножения. Функциональное свойство

$$e^{i(y+y')} = e^{iy} \cdot e^{iy'}$$

означает следующее: *отображение $y \to e^{iy}$ есть гомоморфизм аддитивной группы* $\mathbf{R}$ *в мультипликативную группу* $\mathbf{U}$. Мы исследуем этот гомоморфизм более подробно.

Теорема. *Гомоморфизм $y \to e^{iy}$ отображает* $\mathbf{R}$ *на всю группу* $\mathbf{U}$, *причем его ядро* (подгруппа группы $\mathbf{R}$, состоящая из тех y, которые переходят при этом гомоморфизме в единицу группы $\mathbf{U}$) *состоит из всех целочисленных кратных некоторого положительного действительного числа. По определению, это число называется* 2π.

Доказательство. Введем в рассмотрение действительную и мнимую части e^{iy}, положив, по определению,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Мы определили, таким образом, две действительные функции $\sin y$ и $\cos y$, такие, что

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1.$$

Эти функции разлагаются в степенные ряды с бесконечным радиусом сходимости:

$$\left.\begin{aligned} \cos y &= 1 - \frac{1}{2} y^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} + \ldots, \\ \sin y &= y - \frac{1}{3!} y^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} + \ldots . \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Изучим свойства этих функций. Заметим, что, разделяя мнимую и действительную части во втором из соотношений (1.4), мы получаем равенство

$$\frac{d}{dy} \cos y = -\sin y; \quad \frac{d}{dy} \sin y = \cos y.$$

Если $y = 0$, то $\cos y = 1$; так как $\cos y$ — непрерывная функция, то существует $y_0 > 0$, такое, что $\cos y > 0$ при $0 \leqslant y \leqslant y_0$. Следовательно, функция $\sin y$, производная которой равна $\cos y$, возрастает на интервале $[0, y_0]$. Положим $\sin y_0 = a > 0$. Покажем, что $\cos y$ обращается в нуль для некоторого положительного значения y. Действительно, пусть $\cos y > 0$ при $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$; тогда

$$\cos y_1 - \cos y_0 = -\int_{y_0}^{y_1} \sin y\, dy. \tag{3.2}$$

Однако $\sin y \geqslant a$, так как $\sin y$ возрастает на интервале $[y_0, y_1]$, поскольку его производная положительна. Следовательно,

$$\int_{y_0}^{y_1} \sin y\, dy \geqslant a(y_1 - y_0).$$

Подставим это неравенство в формулу (3.2). Ввиду того что $\cos y_1 > 0$, получаем

$$y_1 - y_0 < \frac{1}{a} \cos y_0.$$

Мы доказали, что $\cos y$ обращается в нуль на интервале $\left[y_0, y_0 + \frac{1}{a}\cos y_0\right]$. Обозначим через $\frac{\pi}{2}$ самое маленькое положительное значение y, для которого $\cos y = 0$ (это *определение* числа π[1])). На интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\cos y$ строго убывает от 1 до 0, а $\sin y$ возрастает от 0 до 1. Следовательно, отображение $y \to e^{iy}$ взаимно однозначно переводит компактный интервал $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ на множество точек (u, v) единичного круга с неотрицательными абсциссами и ординатами. В силу топологической теоремы о непрерывном и взаимно однозначном отображении *компакта*, имеем:

Лемма. *Отображение $y \to e^{iy}$ есть гомеоморфизм отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ на часть окружности $u^2 + v^2 = 1$, расположенную в первом квадранте плоскости.*

---

[1]) Как скоро увидит читатель, оно совпадает с тем, которое было дано в формулировке теоремы. —*Прим. ред.*

При $\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \pi$ имеем $e^{iy} = ie^{i(y-\pi/2)}$, откуда вытекает, что e^{iy} принимает на этом интервале по одному разу все комплексные значения с модулем, равным 1, у которых абсцисса неположительна, а ордината неотрицательна.

Аналогичные заключения можно сделать относительно интервалов $[\pi, 3\pi/2]$ и $[3\pi/2, 2\pi]$. Таким образом, при $0 \leqslant y < 2\pi$ функция e^{iy} принимает точно по одному разу все комплексные значения с модулем, равным единице, в то время как $e^{2i\pi} = 1$. Таким образом, функция e^{iy} есть периодическая функция с периодом 2π, и отображение $y \to e^{iy}$ переводит $\mathbf{R}$ на все $\mathbf{U}$. Теорема доказана.

4. Мера угла. Аргумент комплексного числа. Обозначим через $2\pi\mathbf{Z}$ подгруппу аддитивной группы $\mathbf{R}$, образованную целочисленными кратными числа 2π. Отображение $y \to e^{iy}$ индуцирует *изоморфизм* φ *факторгруппы* $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ *на группу* $\mathbf{U}$. Обратный изоморфизм φ^{-1} группы $\mathbf{U}$ на группу $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ сопоставляет каждому комплексному числу u, модуль которого равен единице, действительное число, определенное с точностью до целочисленного кратного числа 2π. Это число называется *аргументом* комплексного числа u и обозначается $\arg u$. Для сокращения записи $\arg u$ обозначает любое из действительных чисел, класс которых по модулю 2π является аргументом u.

Таким образом, функция $\arg u$ представляет собой пример многозначной функции, т. е. функции, сопоставляющей несколько значений одному и тому же значению u. Эта функция является решением задачи о «мере угла» (угол мы отождествляем с соответствующей ему точкой множества $\mathbf{U}$). Таким образом, «мера угла» есть действительное число, определенное по модулю 2π.

В факторгруппу $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ следующим образом вводится топология (*фактортопология* обычной топологии числовой прямой $\mathbf{R}$). Пусть p — каноническое отображение $\mathbf{R}$ на факторгруппу $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$; подмножество A множества $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ называется *открытым*, если его полный прообраз $p^{-1}(A)$ (подмножество множества $\mathbf{R}$, инвариантное относительно сдвига на 2π) является открытым множеством в $\mathbf{R}$. Очевидно, топологическое пространство $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ является хаусдорфовым (иными словами, любые две различные точки обладают непересекающимися открытыми окрестностями). Более того, это пространство *компактно*; в самом деле, пусть I — замкнутый интервал $[0, 2\pi]$; естественное отображение $I \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ отображает компактное пространство I *на* хаусдорфово пространство $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, которое, следовательно, компактно, согласно классической теореме топологии. Гомоморфизм $\varphi: \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to \mathbf{U}$ есть непрерывное и взаимно однозначное отображение компактного пространства $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ на хаусдорфово пространство $\mathbf{U}$. Следовательно, φ является *гомеоморфизмом* $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ на $\mathbf{U}$.

Общее определение аргумента. Пусть t — произвольное комплексное число, не равное нулю. Определим *аргумент* числа t по формуле

$$\arg t = \arg(t/|t|).$$

Величина, стоящая в правой части равенства, определена, так как $t/|t| \in \mathbf{U}$. (Заметим, что аргумент числа 0 не определен.) Как и выше, аргумент комплексного числа t определен с точностью до целочисленного кратного числа 2π. Таким образом, для любого комплексного числа t имеет место равенство

$$t = |t|\, e^{i \arg t}. \tag{4.1}$$

Укажем одно приложение полученных результатов. Пусть $a \neq 0$ — данное комплексное число. Требуется решить уравнение $t^n = a$. Это уравнение эквивалентно системе уравнений

$$|t| = |a|^{1/n}, \quad \arg t = \frac{1}{n} \arg a.$$

Оно имеет n комплексных решений t, так как второе из равенств определяет $\arg t$ с точностью до целочисленного кратного числа $\frac{2\pi}{n}$.

5. Комплексный логарифм. Пусть дано комплексное число t; найдем все комплексные числа z, такие, что $e^z = t$. Они существуют только тогда, когда $t \neq 0$. В самом деле, соотношение (4.1) показывает, что этим свойством обладают числа вида

$$\log|t| + i \arg t. \tag{5.1}$$

Положим, по определению,

$$\log t = \log |t| + i \arg t. \tag{5.2}$$

Это — комплексное число, определенное с точностью до прибавления целочисленного кратного числа $2\pi i$. Из определения сразу следует, что $e^{\log t} = t$. В случае, когда t — действительное число, большее 0, $\log t$ совпадает с классической логарифмической функцией, если ограничиться для $\arg t$ рассмотрением одного лишь значения 0.

Если t_1 и t_2 — комплексные числа, отличные от нуля, то для любых значений $\log t_1$, $\log t_2$ и $\log (t_1 \cdot t_2)$ имеет место равенство

$$\log (t_1 \cdot t_2) = \log t_1 + \log t_2 \pmod{2\pi i}. \tag{5.3}$$

Непрерывная ветвь логарифма. До сих пор мы не давали определения комплексного логарифма как *функции*.

Определение. Говорят, что *непрерывная* функция $f(t)$ комплексного переменного t, определенная в *области*[1]) D комплексной плоскости $\mathbf{C}$, не содержащей точки $t = 0$, является *непрерывной ветвью логарифма*, если $e^{f(t)} = t$ в любой точке $t \in D$ (иначе говоря, $f(t)$ — одно из возможных значений $\log t$).

Мы узнаем несколько позже (гл. II, § 1, п. 7), каким условиям должна удовлетворять область D для того, чтобы в ней существовала непрерывная ветвь логарифма. А сейчас мы увидим, каким образом можно получить все непрерывные ветви $\log t$, если существует одна из них.

Предложение 5.1. *Если в области D существует непрерывная ветвь $f(t)$ логарифма, то все другие ветви имеют вид $f(t) + 2k\pi i$ (k — целое число); обратно, для любого целого k функция $f(t) + 2k\pi i$ является непрерывной ветвью логарифма вместе с $f(t)$.*

Предположим, действительно, что $f(t)$ и $g(t)$ — две непрерывные ветви $\log t$. Разность

$$h(t) = \frac{f(t) - g(t)}{2\pi i}$$

1) Под областью понимается связное открытое множество.

является функцией, непрерывной в области D и принимающей только целые значения. Так как D связна, такая функция может быть только *постоянной*. Действительно, множество точек $t \in D$, таких, что $h(t)$ равно данному числу n, и открыто, и замкнуто. Следовательно, это множество либо пусто, либо совпадает с D. Постоянная, которой равна функция $h(t)$, обязательно будет целым числом. Тот факт, что $f(t)+2k\pi i$ для всех целых чисел k является непрерывной ветвью логарифма вместе с $f(t)$, очевиден.

Этим же способом можно определить понятие непрерывной ветви функции $\arg t$ в области D, не содержащей начала координат. Впрочем, всякая непрерывная ветвь $\arg t$ определяет непрерывную ветвь $\log t$, и наоборот.

Пример. Выберем в качестве D открытую полуплоскость $\operatorname{Re} t > 0$ (напомним, что через $\operatorname{Re} t$ обозначается действительная часть числа t). Для любой точки t этой полуплоскости существует одно и только одно значение $\arg t$, заключенное между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$; обозначим его через $\operatorname{Arg} t$. Как мы сейчас покажем, $\operatorname{Arg} t$ есть *непрерывная функция*, и, следовательно, функция

$$\log|t|+i\operatorname{Arg} t$$

является непрерывной ветвью логарифма в полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$. Она называется *главным значением* (главной непрерывной ветвью) функции $\log t$.

Поскольку $\operatorname{Arg} t = \operatorname{Arg}(t/|t|)$ и отображение $t \to t/|t|$ есть непрерывное отображение полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$ на множество таких u, для которых $|u|=1$ и $\operatorname{Re} u > 0$, то достаточно показать, что отображение $y = \operatorname{Arg} u$ непрерывно на этом множестве. Для этого рассмотрим обратное отображение $u = e^{iy}$, где y пробегает открытый интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Функция $u = e^{iy}$ задает непрерывное взаимно однозначное отображение компактного интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ на множество комплексных чисел u, таких, что $|u| = 1$ и $\operatorname{Re} u \geqslant 0$; следовательно, это отображение является гомеоморфизмом. Поэтому обратное отображение непрерывно, что и требовалось доказать.

6. Разложение комплексного логарифма в ряд.

Предложение 6.1. *Сумма степенного ряда*

$$T(u)=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n},$$

сходящегося при $|u|<1$, *равна главной непрерывной ветви функции* $\log(1+u)$.

Заметим сначала, что если $|u|<1$, то точка $t=1+u$ находится внутри открытого круга, содержащегося в открытой полуплоскости $\operatorname{Re} t>0$.

Мы будем пользоваться обозначениями формулы (2.4). Как было доказано в конце п. 3, ряды S и T взаимно обратны относительно композиции; предложение 5.1 из § 2 показывает, что равенство $S(T(u))=u$ имеет место для всех комплексных чисел, по модулю меньших единицы, или, иначе говоря, что $e^{T(u)}=1+u$ и, следовательно, $T(u)$ — непрерывная ветвь функции $\log(1+u)$.

Для того чтобы показать, что функция $T(u)$ есть главная непрерывная ветвь, достаточно убедиться в том, что она совпадает с главной непрерывной ветвью для одного какого-нибудь значения переменного u, например, что $T(u)=0$ при $u=0$. Но это ясно из разложения функции $T(u)$ в степенной ряд.

Предложение 6.2. *Если* $f(t)$ — *непрерывная ветвь функции* $\log t$ *в области* D, *то функция* $f(t)$ *дифференцируема по комплексному переменному* t *и*

$$f'(t)=\frac{1}{t}.$$

В самом деле, для отличного от нуля комплексного числа h, модуль которого достаточно мал, имеем

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\frac{f(t+h)-f(t)}{e^{f(t+h)}-e^{f(t)}}.$$

Когда h стремится к нулю, эта дробь стремится к обратной величине предела $\dfrac{e^{z'}-e^{z}}{z'-z}$ при z', стремящемся к $z=f(t)$. Таким образом, искомый предел есть обратная величина значения производной функции e^z при $z=f(t)$. Он равен, следовательно, $e^{-f(t)}=1/t$.

Замечание. Для проверки можно убедиться в том, что производная ряда $T(u)$ в точности равна $\frac{1}{1+u}$.

Определение. Пусть $t \neq 0$ и α — два комплексных числа. Положим

$$t^{\alpha} = e^{\alpha \log t}.$$

Если α фиксировано, то это, вообще говоря, многозначная функция t.

Так же, как и выше, можно определить понятие непрерывной ветви функции t^{α} в области D. Каждая непрерывная ветвь логарифма в области D определяет в этой области непрерывную ветвь функции t^{α}.

Упражнение. После чтения этого параграфа читателю рекомендуется рассмотреть разложения в степенной ряд простейших функций $\operatorname{arc\,tg} x$, $\arcsin x$ и т. д. Кроме того, для всех комплексных показателей α и комплексных чисел x, таких, что $|x| < 1$, положим

$$(1+x)^{\alpha} = e^{\alpha \log (1+x)},$$

где под $\log (1+x)$ понимается главное значение логарифма, а функция $(1+x)^{\alpha}$ принимает значение 1 при $x=0$. Исследовать разложение этой функции в степенной ряд.

§ 4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО И КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Определения.

Определение 1.1. Говорят, что функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, *разлагается в этой точке в степенной ряд*, если существует формальный степенной ряд $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, радиус сходимости которого отличен от нуля и который удовлетворяет условию:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n, \text{ когда } |x - x_0| \text{ достаточно мал.}$$

Это определение в одинаковой степени пригодно для случая действительного и комплексного переменного. Ряд $S(X)$, если он существует, *единствен* (см. § 2, п. 8).

Если функция $f(x)$ разлагается в точке x_0 в степенной ряд, то в окрестности этой точки функция бесконечно дифференцируема, поскольку она является суммой степенного ряда. Если произведение fg двух функций f и g, разложимых в точке x_0 в степенной ряд, тождественно равно нулю в окрестности точки x_0, то этим же свойством обладает по крайней мере одна из этих функций. Это вытекает из того, что кольцо формальных степенных рядов представляет собой область целостности (§ 1, предложение 3.1). Если функция f разложима в степенной ряд в точке x_0, то существует функция g, также разложимая в степенной ряд в точке x_0, производная g' которой равна f в окрестности точки x_0. Такая функция g восстанавливается по f однозначно, с точностью до постоянного слагаемого. Для того чтобы доказать это, достаточно рассмотреть ряд, членами которого являются примитивные членов разложения в степенной ряд функции f.

Теперь мы рассмотрим открытое множество D на действительной прямой $\mathbf{R}$ или на комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Если D — открытое множество из $\mathbf{R}$, то D представляет собой объединение открытых интервалов, если же множество D связно, то оно есть открытый интервал. Обозначим через x действительное или комплексное переменное, принимающее значения в открытом множестве D.

Определение 1.2. Функция $f(x)$ действительного или комплексного переменного, определенная в открытом множестве D, называется *аналитической* в этом множестве, если она разлагается в степенной ряд в каждой точке этого множества. Иначе говоря, для каждой точки $x_0 \in D$ существует число $\varrho(x_0) > 0$ и формальный степенной ряд $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ радиуса сходимости, большего или равного $\varrho(x_0)$, такой, что $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ при $|x - x_0| < \varrho(x_0)$.

Укажем некоторые очевидные свойства аналитических функций. Всякая функция, аналитическая в открытом множестве D, бесконечно дифференцируема в этом множестве, причем все ее производные также аналитичны в D. Сумма и произведение двух функций, аналитических в множестве D, также аналитичны в этом множестве; иначе говоря, функции, аналитические в D, образуют кольцо и, более того, алгебру.

Из предложения 6.1 § 2 следует, что если $f(x)$ — функция, аналитическая в D, то функция $1/f(x)$ аналитична в открытом множестве, которое получается из D, если удалить из нее те точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль.

Наконец, из предложения 5.1 § 2 следует, что если f — функция, аналитическая в D и принимающая значения в открытом множестве D', а g — функция, аналитическая в D', то суперпозиция $g \circ f$ аналитична в D.

Пусть f — функция, аналитическая в *области* D (иначе говоря, в связном открытом множестве D); если существует функция g, примитивная для функции f, т. е. такая функция, производная которой в области D равна f, то эта функция определена однозначно, с точностью до постоянного слагаемого, и аналитична в области D.

Примеры аналитических функций. Многочлены от x являются аналитическими функциями на всей действительной прямой (соответственно на комплексной плоскости); рациональная функция $P(x)/Q(x)$ аналитична в дополнении множества тех точек x, в которых многочлен $Q(x)$ обращается в нуль. Из предложения 2.1 будет следовать аналитичность функции e^x. Функция $\operatorname{arc\,tg} x$ аналитична для всех действительных x, поскольку аналитична ее производная $\frac{1}{1+x^2}$.

2. Критерий аналитичности.

Предложение 2.1. *Пусть* $S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ — *степенной ряд, радиус сходимости* ϱ *которого отличен от нуля; пусть*

$$S(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n, \quad \text{где } |x| < \varrho,$$

— *его сумма. Тогда* $S(x)$ — *аналитическая функция на множестве* $|x| < \varrho$.

Этот факт не вполне очевиден. Он вытекает из следующего более точного утверждения.

Предложение 2.2. *В условиях предложения 2.1 пусть x_0 — такая точка, что $|x_0| < \varrho$. Тогда степенной ряд*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) X^n \tag{2.1}$$

имеет радиус сходимости, больший или равный $\varrho - |x_0|$, а при $|x - x_0| < \varrho - |x_0|$

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \tag{2.2}$$

Доказательство предложения 2.2. Положим $r_0 = |x_0|$, $\alpha_n = |a_n|$. Тогда

$$S^{(p)}(x_0) = \sum_{q\geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} x_0^q,$$

$$|S^{(p)}(x_0)| \leqslant \sum_{q\geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} \alpha_{p+q} r_0^q.$$

Если $r_0 \leqslant r < \varrho$, то

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(x_0)| (r - r_0)^p \leqslant \sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} \alpha_{p+q} r_0^q (r - r_0)^p \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\geq 0} \alpha_n \left(\sum_{0\leqslant p\leqslant n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} (r - r_0)^p r_0^{n-p} \right) \leqslant \sum_{n\geq 0} \alpha_n r^n < +\infty. \tag{2.3}$$

Следовательно, радиус сходимости ряда (2.1) больше или равен $r - r_0$. Так как число r может быть выбрано сколь угодно близким к ϱ, то радиус сходимости этого ряда больше или равен $\varrho - r_0$.

Пусть теперь x — такая точка, что $|x - x_0| < \varrho - r_0$. Двойной ряд

$$\sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} a_{p+q} x_0^q (x - x_0)^p$$

абсолютно сходится, в силу (2.3). Для вычисления суммы этого ряда можно, следовательно, сгруппировать его члены произвольным образом. Мы вычислим эту сумму двумя различными способами.

Первый способ дает

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \left(\sum_{0\leqslant p\leqslant n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} (x-x_0)^p\, x_0^{n-p} \right) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = S(x).$$

Сгруппировав члены ряда по-другому, получаем

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{(x-x_0)^p}{p!} \left(\sum_{q\geqslant 0} \frac{(p+q)!}{q!}\, a_{p+q}\, x_0^q \right) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{(x-x_0)^p}{p!}\, S^{(p)}(x_0).$$

Сравнивая полученные результаты, получаем равенство (2.2). Предложение 2.2 доказано.

Замечание 1. На самом деле радиус сходимости ряда (2.1) может быть больше, чем $\varrho - |x_0|$. Рассмотрим, например, ряд

$$S(X) = \sum_{n\geqslant 0} (iX)^n.$$

Очевидно, $S(x) = \frac{1}{1-ix}$ для $|x| < 1$. Пусть x_0 — действительное число. Тогда

$$\frac{1}{1-ix} = \frac{1}{1-ix_0} \left(1 - i\,\frac{x-x_0}{1-ix_0} \right)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{i^n}{(1-ix_0)^{n+1}} (x-x_0)^n.$$

Этот ряд сходится при $|x - x_0| < \sqrt{1+x_0^2}$. В то же время ясно, что $\sqrt{1+x_0^2}$ строго больше, чем $1 - |x_0|$.

Замечание 2. Положим

$$M(r) = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|\, r^n, \quad \text{где } r < \varrho.$$

В силу формулы (2.3), при $|x| \leqslant r_0 < r < \varrho$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{1}{p!} S^{(p)}(x) \right| \leqslant \frac{M(r)}{(r-r_0)^p}. \tag{2.4}$$

Замечание 3. Если x — *комплексное* переменное, то, как мы увидим в гл. II, всякая дифференцируемая функция аналитична и, следовательно, бесконечно дифференцируема. В случае одного действительного переменного ситуация совершенно иная. Существуют функции, имеющие первую производную, но не имеющие второй (например, примитивная непрерывной функции, не имеющей производной). Кроме того, существуют бесконечно дифференцируемые функции, не являющиеся аналитическими. Вот простой пример: функция $f(x)$, равная нулю при $x=0$ и равная e^{-1/x^2} при $x \neq 0$, бесконечно дифференцируема для всех x. В точке $x=0$ она обращается в нуль вместе со всеми производными. Если бы она была аналитической, то она была бы тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки $x=0$, что, однако, не имеет места.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$ действительного переменного x, бесконечно дифференцируемая в открытом интервале D, была аналитической в D, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $x_0 \in D$ обладала окрестностью V, удовлетворяющей следующему условию: существуют два положительных числа M и t, таких, что для любой точки $x \in V$ и целого числа $p \geqslant 0$ имеем*

$$\left| \frac{1}{p!} f^{(p)}(x) \right| \leqslant M \cdot t^p. \tag{2.5}$$

Сокращенное доказательство. Необходимость этого условия вытекает из неравенства (2.4). Достаточность получается из рассмотрения ряда Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

3. Принцип аналитического продолжения.

Теорема. *Пусть f — функция, аналитическая в области D, и $x_0 \in D$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) $f^{(n)}(x_0) = 0$ *для всех целых чисел* $n \geqslant 0$;

б) f *тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки* x_0;

в) f *тождественно равна нулю в* D.

Доказательство. Очевидно, что из в) следует а). Теорема будет доказана, если мы покажем, что из а) следует б) и из б) следует в).

Предположим, что выполнено условие а), т. е. $f^{(n)}(x_0) = 0$ для всех $n \geqslant 0$, причем по определению $f^{(0)} = f$. В окрестности точки x_0 функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд по степеням $x - x_0$, коэффициенты $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ которого все равны нулю. Следовательно, $f(x)$ тождественно равна нулю в окрестности точки x_0. Условие б) доказано.

Пусть теперь выполнено условие б). Для того чтобы показать, что f равна нулю во всех точках D, достаточно доказать, что множество D' тех точек $x \in D$, *в окрестности которых f тождественно равна нулю*, открыто и замкнуто в D. (D' не пусто, поскольку, в силу условия б), ему принадлежит точка x_0; следовательно, из связности D будет вытекать, что $D' = D$.) Из определения D' непосредственно видно, что это открытое множество. Остается показать, что если $x_0 \in D$ есть предельная точка для множества D', то $x_0 \in D'$. Однако при любом $n \geqslant 0$ для точек, произвольно близких к точке x_0 (а именно для точек D'), выполнено равенство $f^{(n)}(x) = 0$. Следовательно, в силу непрерывности функций $f^{(n)}$, для всех $n \geqslant 0$ имеют место равенства $f^{(n)}(x_0) = 0$. Отсюда, согласно доказанному выше, f тождественно равна нулю в окрестности точки x_0, т. е. точка x_0 принадлежит множеству D'. Теорема доказана.

Следствие 1. *Кольцо функций, аналитических в области D, есть область целостности.*

В самом деле, если произведение fg двух функций, аналитических в области D, тождественно равно нулю и если $x_0 \in D$ — произвольная точка, то, поскольку кольцо формальных степенных рядов есть область целостности, одна из функций f и g тождественно равна нулю в окрестности точки x_0. Но, согласно доказанной теореме, если функция f, аналитическая в области D, тождественно равна нулю в окрестности некоторой точки $x_0 \in D$, то она тождественно равна нулю во всей области D.

Следствие 2 (принцип аналитического продолжения). *Если две функции f и g, аналитические в области D, совпадают в окрестности некоторой точки этой области, то они совпадают во всей области D.*

Проблема аналитического продолжения состоит в следующем: пусть дана функция h, аналитическая в области D', и пусть D — некоторая область, содержащая D'; требуется построить функцию f, аналитическую в области D и совпадающую с h в области D'. Согласно следствию 2, если такая функция существует, то она единственна.

4. Нули аналитической функции. Пусть $f(x)$ — функция, аналитическая в окрестности точки x_0, и пусть

$$f(x)=\sum_{n\geqslant 0} a_n (x-x_0)^n$$

— ее разложение в степенной ряд по $x-x_0$ для достаточно малых $|x-x_0|$. Предположим, что $f(x_0)=0$ и что в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ *не есть тождественный нуль.*

Пусть k — самый маленький индекс, для которого коэффициент a_k отличен от нуля. Ряд

$$\sum_{n\geqslant k} a_n (x-x_0)^{n-k}$$

сходится для достаточно малых $|x-x_0|$ и его сумма есть аналитическая в окрестности точки x_0 функция $g(x)$, такая, что $g(x_0)\neq 0$. Итак, если x близко к x_0, то

$$f(x)=(x-x_0)^k g(x), \qquad g(x_0)\neq 0. \tag{4.1}$$

Целое число $k>0$ называется *кратностью* нуля x_0 функции f. Это число определяется условием (4.1), в котором $g(x)$ — функция, аналитическая в окрестности x_0. Кратность k нуля характеризуется также таким условием:

$$f^{(n)}(x_0)=0 \text{ при } 0\leqslant n<k, \text{ но } f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

Если $k=1$, то говорят, что x_0 — *простой* нуль. Если $k\geqslant 2$, то говорят, что x_0 — *кратный нуль.*

Из соотношения (4.1) и непрерывности функции $g(x)$ следует, что

$$f(x)\neq 0 \text{ при } 0<|x-x_0|<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ достаточно мало. Иными словами, точка x_0 обладает окрестностью, в которой x_0 — *единственный нуль* функции $f(x)$.

Предложение 4.1. *Если f — функция, аналитическая в области D и не равная в этой области тождественно нулю, то множество нулей этой функции дискретно* (т. е. все точки этого множества *изолированы*).

В самом деле, в силу следствия 2 п. 3, функция f не равна тождественно нулю в окрестности ни одной точки области

D; поэтому можно применить последнее утверждение к каждому нулю функции f.

В частности, любое компактное подмножество области D содержит лишь *конечное число* нулей функции f.

5. Мероморфные функции. Пусть f и g — две функции, аналитические в области D, причем g не равна тождественно нулю. Функция $f(x)/g(x)$ определена и аналитична в окрестности любой точки x_0, в которой $g(x_0) \neq 0$, т. е. любой точки области D, за исключением, возможно, дискретного множества точек.

Исследуем свойства функции $f(x)/g(x)$ в окрестности точки x_0, в которой функция $g(x)$ обращается в нуль. Если функция f не есть тождественный нуль, то в окрестности точки x_0 имеют место равенства

$$f(x) = (x - x_0)^k f_1(x) \text{ и } g(x) = (x - x_0)^{k'} g_1(x),$$

где k и k' — целые числа, причем $k \geqslant 0$, $k' > 0$, а f_1 и g_1 — функции, аналитические в окрестности точки x_0, такие, что $f_1(x_0) \neq 0$ и $g_1(x_0) \neq 0$. Следовательно, если x достаточно близко к x_0 и $x \neq x_0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (x - x_0)^{k-k'} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Функция $h_1(x) = f_1(x)/g_1(x)$ аналитична в окрестности точки x_0 и при этом $h_1(x_0) \neq 0$. Возможны два случая:

1. $k \geqslant k'$. Тогда функция

$$(x - x_0)^{k-k'} h_1(x)$$

аналитична в окрестности точки x_0 и совпадает с $f(x)/g(x)$ при $x \neq x_0$. Продолженная таким образом в точку x_0 функция f/g аналитична в ее окрестности; если $k > k'$, то точка x_0 является ее нулем.

2. $k < k'$. Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x - x_0)^{k'-k}} h_1(x), \quad h_1(x_0) \neq 0.$$

В этом случае говорят, что точка x_0 является *полюсом* функции f/g; число $k' - k$ называется *кратностью полюса*.

Когда x стремится к x_0, величина $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ стремится к $+\infty$. Можно условиться считать, что значение функции f/g в точке x_0 «бесконечно». Позднее мы ещё вернемся к вопросу о введении «бесконечного числа», которое будем обозначать символом ∞.

Если функция $f(x)$ аналитична в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке нуль кратности k, то функция $1/f(x)$, очевидно, имеет в этой точке полюс кратности k.

Определение. Назовем функцию $f(x)$ *мероморфной* в области D, если $f(x)$ определена и аналитична во всех точках области D', полученной из D удалением дискретного множества точек, являющихся *полюсами* функции $f(x)$.

В окрестности каждой точки области D (без исключения) такую функцию f можно представить в виде частного двух аналитических функций $f(x)/g(x)$, где знаменатель не равен нулю тождественно. Очевидным образом определяются сумма и произведение двух мероморфных функций; ясно, что относительно этих операций мероморфные функции образуют кольцо и даже алгебру. На самом деле они образуют поле. Действительно, если функция f, аналитическая в области D, не равна тождественно нулю в этой области, то она не равна тождественно нулю в окрестности никакой точки области D, согласно теореме из п. 3. Следовательно, функция $1/f(x)$ в каждой точке D или аналитична, или имеет полюс, т. е. она мероморфна в области D.

Предложение 5.1. *Производная f' функции f, мероморфной в области D, также мероморфна в области D. Функции f и f' имеют полюсы в одних и тех же точках, причем если точка x_0 — полюс функции f кратности $k > 0$, то она является полюсом функции f' кратности $k+1$.*

В самом деле, f' определена и аналитична во всех точках области D, которые не являются полюсами функции f. Остается показать, что если точка x_0 — полюс функции f, то она есть также полюс функции f'. Однако для любого x, достаточно близкого к x_0,

$$f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^k}\, g(x),$$

где $g(x)$ — функция, аналитическая в окрестности точки x_0, причем $g(x_0) \neq 0$, $k > 0$. Следовательно, если $x \neq x_0$, то

$$f'(x) = \frac{1}{(x-x_0)^{k+1}} [(x-x_0) g'(x) - kg(x)] = \frac{1}{(x-x_0)^{k+1}} g_1(x),$$

и, так как $g_1(x_0) \neq 0$, точка x_0 — полюс функции f' кратности $k+1$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть K — коммутативное поле, $E = K[[X]]$ — алгебра формальных степенных рядов с коэффициентами из K. Для любых двух рядов S, $T \in E$ положим

$$d(S, T) = \begin{cases} 0, & \text{если } S = T, \\ e^{-k}, & \text{если } S \neq T \text{ и } \omega(S-T) = k. \end{cases}$$

а) Доказать, что d определяет метрику в множестве E.

б) Доказать, что отображения $(S, T) \to S + T$, $(S, T) \to ST$, определенные на произведении $E \times E$ и принимающие значения в E, непрерывны в топологии, определяемой метрикой d.

в) Доказать, что алгебра полиномов $K[X]$ как подмножество E всюду плотна в E в смысле введенной топологии.

г) Доказать, что метрическое пространство E полно. (Воспользоваться тем, что если $\{S_n\}$ — последовательность Коши в E, то для любого $m > 0$ первые m членов ряда S_n не зависят от n, когда n достаточно велико.)

д) Непрерывно ли отображение $S \to S'$ (S' — производная S)?

2. Пусть p и q — целые положительные числа. Рассмотрим формальный степенной ряд

$$S_1(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^n + \ldots$$

и положим

$$S_p(X) = (S_1(X))^p.$$

а) Индукцией по n доказать соотношение

$$1 + p + \frac{p(p+1)}{2!} + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!} = \frac{(p+1)\ldots(p+n)}{n!} \quad (1)$$

и получить (индукцией по p) разложение

$$S_p(X) = \sum_{n\geq 0} C_{p+n-1}^{n} X^n, \tag{2}$$

где через C_k^h обозначен биномиальный коэффициент $\frac{k!}{h!(k-h)!}$.

б) Пользуясь равенством $S_p(X)\cdot S_q(X) = S_{p+q}(X)$, доказать соотношение

$$\sum_{0\leq l\leq n} C_{p+l-1}^{l}\cdot C_{q+n-l-1}^{n-l} = C_{p+q+n-1}^{n} \tag{3}$$

[если в равенстве (3) положить $q = 1$, то получим соотношение (1)].

3. Вычислить для $n\leq 5$ полиномы P_n из доказательства предложения 7.1, § 1 и найти члены степени, не превосходящей 5, формального степенного ряда, обратного относительно композиции ряду

$$S(X) = X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5 + \ldots + (-1)^p \frac{1}{2p+1}X^{2p+1} + \ldots .$$

4. Определить радиус сходимости следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n\geq 0} q^{n^2}z^n$ $(|q|<1)$;

б) $\sum\limits_{n\geq 0} n^p z^n$ (p — целое положительное число);

в) $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, где $a_{2n+1} = a^{2n+1}$, $a_{2n} = b^{2n}$ при $n\geq 0$, a и b — действительные числа, $0 < a,\ b < 1$.

5. Рассмотрим два формальных степенных ряда

$$S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \quad \text{и} \quad T(X) = \sum_{n\geq 0} b_n X^n \quad (b_n \neq 0)$$

и положим

$$U(X) = \sum_{n\geq 0} a_n^p X^n,$$

$$V(X) = \sum_{n\geq 0} a_n b_n X^n, \qquad W(X) = \sum_{n\geq 0} (a_n/b_n) X^n$$

(p — целое число). Доказать, что

$$\rho(U) = (\rho(S))^p, \quad \rho(V) \geq \rho(S)\cdot\rho(T),$$

и если $\varrho(T) \neq 0$, то

$$\varrho(W) \leqslant \varrho(S /\varrho(T).$$

6. Пусть a, b и c — комплексные числа, причем c не является неположительным целым числом. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$S(X) = 1 + \frac{ab}{c}X + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{2!\,c(c+1)}X^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)\cdot b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)\ldots(c+n-1)}X^n + \ldots .$$

Доказать, что его сумма $S(z)$ при $|z| < \varrho(S)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$z(1-z)S'' + (c-(a+b+1)z)S' - abS = 0.$$

7. Пусть $S(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ — формальный степенной ряд, такой, что $\varrho(S) = 1$. Положим

$$s_n = a_0 + \ldots + a_n; \quad t_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \ldots + s_n) \text{ для } n \geqslant 0$$

и

$$U(X) = \sum_{n\geqslant 0} s_n X^n, \quad V(X) = \sum_{n\geqslant 0} t_n X^n.$$

Показать, что: (1) $\varrho(U) = \varrho(V) = 1$, (2) для всех $|z| < 1$

$$\frac{1}{1-z}\Big(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\Big) = \sum_{n\geqslant 0} s_n z^n.$$

8. Пусть $S(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ — формальный степенной ряд, коэффициенты которого определены с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} \quad \text{при} \quad n \geqslant 2,$$

где α и β — данные действительные числа.

а) Доказать, что $|a_n| \leqslant (2c)^{n-1}$, где $c = \max(|\alpha|, |\beta|, 1/2)$, $n \geqslant 1$, и что радиус сходимости $\varrho(S)$ ряда S отличен от нуля.

б) Показать, что для $|z| < \varrho(S)$ имеет место равенство

$$(1 - \alpha z - \beta z^2)\,S(z) = z$$

и, следовательно,

$$S(z)=\frac{z}{1-\alpha z-\beta z^2}. \tag{1}$$

в) Пусть z_1 и z_2 — корни уравнения $\beta X^2+\alpha X-1=0$. Используя разложение правой части равенства (1) на простейшие дроби, найти выражение a_n через z_1 и z_2 и показать, что

$$\varrho(S)=\min(|z_1|,\ |z_2|).$$

(Воспользоваться тем, что если $S(X)=S_1(X)+S_2(X)$, то $\varrho(S)\geqslant\min(\varrho(S_1),\ \varrho(S_2))$.)

9. Показать, что если x и y — действительные числа, $n\geqslant 0$ — целое число, то

$$\sum_{0\leqslant p\leqslant n}\cos(px+y)=\frac{\cos\left(\frac{n}{2}x+y\right)\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},$$

$$\sum_{0\leqslant p\leqslant n}\sin(px+y)=\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x+y\right)\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

(Воспользоваться равенством $\cos(px+y)+i\sin(px+y)=e^{i(px+y)}=e^{iy}(e^{ix})^p$.)

10. Доказать следующее неравенство для любого $z\in\mathbf{C}$:

$$|e^z-1|\leqslant e^{|z|}-1\leqslant|z|\,e^{|z|}.$$

11. Доказать, что если n — целое положительное число, а z — комплексное число, то

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=1+z+\sum_{2\leqslant p\leqslant n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\frac{z^p}{p!},$$

и получить отсюда, что для любого комплексного z

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

12. Доказать, что функция комплексного переменного z, определенная равенством

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ \left(\text{соответственно } \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right),$$

дает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость $\mathbf{C}$ функции $\cos x$ (соответственно $\sin x$), определенной в § 3, п. 3. Показать, что для любых $z, z' \in \mathbf{C}$ справедливы равенства

$$\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z',$$
$$\sin(z+z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z',$$
$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

13. Показать, что для любого действительного числа x, такого, что $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, справедливо неравенство

$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

14. Пусть $z = x + iy$, где x и y действительны.

(1) Показать, что

$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y,$$
$$|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

(2) Определить нули функций $\sin az$, $\cos az$ (где a — действительное число, отличное от нуля).

(3) Показать, что если $-\pi < a < \pi$, а n — целое положительное число, то

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y} \quad \text{при} \quad z = n + \frac{1}{2} + iy$$

и

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} a\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\operatorname{sh} \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \quad \text{при} \quad z = x + i\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

(Замечание. По определению $\operatorname{ch} z = \cos iz$, $\operatorname{sh} z = -i \sin iz$.)

15. Пусть I — интервал на действительной прямой $\mathbf{R}$. Показать, что если $f(x)$ — функция (действительного переменного с комплексными значениями), аналитическая в I, то эту функцию можно аналитически продолжить на некоторую область D комплексной плоскости, содержащую интервал I.

16. (1) Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — две числовые последовательности со следующими свойствами:

а) существует число $M > 0$, такое, что

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| \leqslant M \text{ для всех } n \geqslant 1;$$

б) числа β_n действительны и неотрицательны, причем $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n \geqslant \ldots$.

Показать, что для всех $n \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n| \leqslant M\beta_1.$$

(Ввести обозначение $s_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ и воспользоваться равенством

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = (\beta_1 - \beta_2) s_1 + \ldots$$
$$\ldots + (\beta_{n-1} - \beta_n) s_{n-1} + \beta_n s_n.)$$

(2) Пусть $S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ — формальный степенной ряд с комплексными коэффициентами, такой, что $\varrho(S) = 1$ и ряд $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ сходится. Используя (1), доказать, что ряд $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ равномерно сходится на замкнутом интервале $[0,1]$ прямой $\mathbf{R}$ и

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ 0 < x < 1}} \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n \geqslant 0} a_n.$$

(3) Пусть теперь $S(X) = \sum_{n \geqslant 1} X^n/n^2$, D — пересечение открытых кругов $|z| < 1$ и $|z - 1| < 1$. Показать, что существует число a, такое, что

$$S(z) + S(1 - z) = a - \log z \log(1 - z)$$

при $z \in D$, где через $\log$ обозначена главная непрерывная ветвь логарифма в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ (содержащей D).

(Воспользоваться тем, что если $z \in D$, то $\log(1 - z) = -T(z)$, где

$$T(X) = X \cdot S'(X),$$

в силу предложения 6.1 § 3, и тем, что, согласно предложению 6.2 § 3,

$$\frac{d}{dz}(\log z \log(1-z)) = \frac{\log(1-z)}{z} - \frac{\log z}{1-z}$$

при $z \in D$.)

Вывести из (2) равенства

$$a = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$$

и.

$$a - (\log 2)^2 = \sum_{n \geqslant 1} 1/n^2 2^{n-1}.$$

(Ср. гл. V, § 2, п. 2, применение предложения 2.1.)

Глава II

ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРАЛ КОШИ

§ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Сведения общего характера. Напомним некоторые элементарные понятия, относящиеся к криволинейным интегралам на плоскости $\mathbf{R}^2$. Координаты на плоскости будем обозначать x и y. Назовем *гладким путем* отображение

$$t \longrightarrow \gamma(t) \tag{1.1}$$

отрезка $[a, b]$ в плоскость $\mathbf{R}^2$, при котором координаты $x(t)$ и $y(t)$ точки $\gamma(t)$ представляют собой непрерывно дифференцируемые функции переменного t. Будем всегда предполагать, что $a < b$. *Началом* пути γ будем называть точку $\gamma(a)$, *концом* — точку $\gamma(b)$. Пусть D — область на плоскости; говорят, что γ — гладкий путь в области D, если все точки $\gamma(t)$ лежат в этой области.

Дифференциальной формой в области D называется выражение

$$\omega = P\,dx + Q\,dy,$$

где коэффициенты P и Q представляют собой действительные или комплексные непрерывные функции в области D.

Если γ — гладкий путь в области D, а ω — дифференциальная форма, то $\int\limits_{\gamma} \omega$ определяется формулой

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} \gamma^*(\omega),$$

где $\gamma^*(\omega)$ — дифференциальная форма $f(t)\,dt$, задаваемая равенством

$$f(t)\,dt = [P(x(t),\ y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),\ y(t))\cdot y'(t)]\,dt.$$

Иными словами, $\gamma^*(\omega)$ — дифференциальная форма, получающаяся из формы ω в результате замены переменных $x = x(t)$, $y = y(t)$. Таким образом,

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Рассмотрим теперь функцию $t = t(u)$, непрерывно дифференцируемую при $a_1 \leqslant u \leqslant b_1$ $(a_1 < b_1)$, производная $t'(u)$ которой всюду положительна и которая принимает в точке a_1 значение a, в точке b_1 — значение b. Композиция отображения $u \to t(u)$ и отображения (1.1) определяет отображение

$$u \to \gamma(t(u)). \qquad (1.2)$$

Это отображение представляет собой гладкий путь γ_1. Говорят, что путь γ_1 получается из пути γ *заменой параметра*. Согласно формуле дифференцирования сложной функции, дифференциальная форма $f_1(u)\,du = \gamma_1^*(\omega)$, получающаяся из $\gamma^*(\omega)$ при преобразовании (1.2), равна

$$f(t(u))\,t'(u)\,du.$$

Из формулы для замены переменного в определенном интеграле непосредственно следует, что

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Иными словами, криволинейный интеграл $\int_\gamma \omega$ не изменяет своего значения при замене гладкого пути γ другим, полученным из него заменой параметра. Ввиду этого в некоторых случаях мы будем обозначать одной и той же буквой пути, полученные один из другого изменением параметра.

Теперь рассмотрим функцию $t = t(u)$, непрерывно дифференцируемую при $a_1 \leqslant u \leqslant b_1$, такую, что $t(a_1) = b$, $t(b_1) = a$, $t'(u) < 0$ («направление обхода» отрезка противоположное). Тогда $\int_{\gamma_1} \omega = -\int_\gamma \omega$. В этом случае говорят, что на пути γ произведена замена параметра, *изменяющая* *ориентацию.* В результате подобной замены интеграл $\int\limits_{\gamma} \omega$ умножается на -1.

Говорят, что задано *подразделение* интервала $[a, b]$, если он представлен как объединение конечного числа интервалов

$$[a, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n], [t_n, b],$$

где $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < b$. Пусть γ_i — сужение отображения γ на i-й из этих интервалов. Очевидно, что

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \sum_i \int\limits_{\gamma_i} \omega .$$

Это свойство позволяет обобщить понятие гладкого пути. Назовем *непрерывное* отображение

$$\gamma: [a, b] \to \mathbf{R}^2$$

кусочно-гладким путем, если существует такое подразделение интервала $[a, b]$ на конечное множество подинтервалов, что сужение отображения γ на каждый из них представляет собой гладкий путь. По определению, положим

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\gamma_i} \omega.$$

Здесь величина правой части не зависит от разбиения.

Начало пути γ_1 называется началом пути γ, а конец пути γ_n — концом пути γ. Говорят, что путь *замкнут*, если его начало и конец совпадают.

В определении замкнутого пути γ можно использовать вместо действительного параметра t, изменяющегося от a до b, параметр θ, который пробегает единичную окружность.

Пример. Рассмотрим в плоскости $\mathbf{R}^2$ периметр (границу) прямоугольника A со сторонами, параллельными осям координат. Прямоугольник представляет собой множество точек (x, y), удовлетворяющих условиям

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2.$$

Граница прямоугольника состоит из четырех отрезков:

$$x=a_2, \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2;$$
$$y=b_2, \quad a_1 \leqslant x \leqslant a_2;$$
$$x=a_1, \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2;$$
$$y=b_1, \quad a_1 \leqslant x \leqslant a_2.$$

Для того чтобы эта граница определяла замкнутый кусочно-гладкий путь γ, нужно еще указать «направление обхода». Условимся всегда считать направление обхода следующим: ордината y изменяется от b_1 до b_2 по стороне $x = a_2$; затем абсцисса x изменяется от a_2 до a_1 по стороне $y = b_2$; затем y изменяется от b_2 до b_1 по стороне $x = a_1$ и x изменяется от a_1 до a_2 по стороне $y = b_1$. Таким образом, интеграл $\int_\gamma \omega$ определен. Он равен сумме интегралов по четырем сторонам, проходимым в указанном направлении.

2. Примитивная дифференциальной формы

Лемма. *Пусть D — некоторая плоская область. Для любой пары точек a, $b \in D$ существует кусочно-гладкий путь, содержащийся в области D, с началом в точке a и концом в точке b.* (Иначе говоря, точки a и b можно соединить кусочно-гладким путем.)

Доказательство. Каждая точка $c \in D$ является центром круга, содержащегося в D. Ее можно соединить с каждой точкой этого круга кусочно-гладким путем (например, по радиусу). Таким образом, если точку c можно соединить кусочно-гладким путем с данной точкой a, то и каждую точку, достаточно близкую к c, можно соединить с a кусочно-гладким путем. Поэтому множество E точек области D, которые можно соединить с точкой a, *открыто*. С другой стороны, множество E также и замкнуто в области D. В самом деле, если $c \in D$ — предельная точка множества E, то ее можно соединить с некоторой точкой, принадлежащей E, указанным выше способом. Следовательно, точку c можно соединить с точкой a. Итак, множество E открыто и замкнуто в области D. Оно не пусто, так как ему принадлежит точка a. Следовательно, оно совпадает со всей областью D, что и требовалось доказать.

Пусть снова D — некоторая плоская область, γ — кусочно-гладкий путь, содержащийся в области D, с началом в точке a и концом в точке b, F — непрерывно дифференцируемая функция в области D. Тогда для дифференциальной формы $\omega = dF$ справедливо равенство

$$\int_\gamma dF = F(b) - F(a). \tag{2.1}$$

Отсюда, применяя доказанную выше лемму, получаем, что *если дифференциал dF тождественно равен нулю в области D, то функция F постоянна.*

Пусть в области D задана дифференциальная форма ω. Мы найдем (если она существует) такую непрерывно дифференцируемую в области D функцию F, что $dF = \omega$. Если $\omega = Pdx + Qdy$, то соотношение $dF = \omega$ равносильно равенствам

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q. \tag{2.2}$$

Подобная функция F, если она существует, называется *примитивной* формы ω. Каждая другая примитивная F_1 формы ω получается прибавлением к F постоянной, так как $d(F - F_1) = 0$.

Предложение 2.1. *Для того чтобы дифференциальная форма ω имела примитивную в области D, необходимо и достаточно, чтобы интеграл формы ω по каждому замкнутому кусочно-гладкому пути γ, содержащемуся в D, равнялся нулю.*

Доказательство. 1. Условие необходимо, так как при $\omega = dF$ соотношение (2.1) показывает, что $\int_\gamma \omega = 0$, если начало a и конец b пути γ совпадают.

2. Условие достаточно. Возьмем точку $(x_0, y_0) \in D$; каждую точку $(x, y) \in D$ можно соединить с (x_0, y_0) кусочно-гладким путем γ, лежащим в D (согласно лемме); значение интеграла $\int_\gamma \omega$ не зависит от выбора пути γ, так

как по предположению интеграл формы ω по любому замкнутому пути равен нулю.

Пусть $F(x, y)$ — значение интеграла $\int\limits_{\gamma} \omega$, где γ — произвольный путь с началом в точке (x_0, y_0) и концом в точке (x, y), содержащийся в области D. Покажем, что определенная таким образом в области D функция F удовлетворяет соотношениям (2.2).

Дадим переменному x малое приращение h; разность

$$F(x+h, y) - F(x, y)$$

равна интегралу $\int \omega$, взятому вдоль какого-нибудь пути с началом в точке (x, y) и концом $(x+h, y)$, содержащегося в области D. Проинтегрируем, в частности, вдоль отрезка прямой, параллельной оси x (это возможно, если $|h|$ достаточно мал):

$$F(x+h, y) - F(x, y) = \int\limits_{x}^{x+h} P(\xi, y)\, d\xi;$$

тогда, поскольку $h \neq 0$,

$$\frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} P(\xi, y)\, d\xi.$$

Когда h стремится к нулю, правая часть последнего равенства стремится, в силу непрерывности функции P, к $P(x, y)$. Итак, действительно

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y).$$

Аналогично можно показать, что $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$. Этим завершается доказательство предложения 2.1.

Рассмотрим, в частности, прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, содержащийся (вместе с границей) в области D.

Если γ — граница такого прямоугольника, то $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$ для любой дифференциальной формы ω, имеющей примитивную в области D.

Как будет видно в дальнейшем, это необходимое условие не всегда достаточно для существования примитивной. Однако оно достаточно, когда D — односвязная область (см. п. 7). В настоящий момент мы довольствуемся доказательством следующего утверждения.

Предложение 2.2. *Пусть D — открытый круг. Если $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$ для любого контура γ, ограничивающего прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, лежащий вместе со своей границей в области D, то форма ω обладает примитивной в области D.*

Доказательство. Пусть (x_0, y_0) — центр круга, (x, y) — произвольная точка области D. Тогда существуют

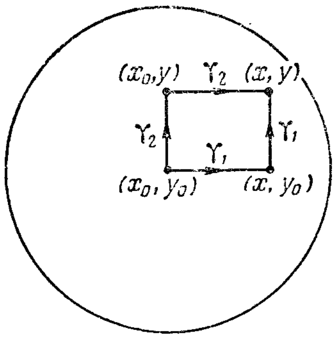


Рис. 1.

два пути γ_1 и γ_2 с началом в точке (x_0, y_0) и концом в точке (x, y); каждый из них составлен из двух сторон прямоугольника, стороны которого параллельны координатным осям, а противоположными вершинами являются (x_0, y_0) и (x, y) (см. рис. 1). Так как этот прямоугольник содержится в D, то $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$. Пусть $F(x, y)$ — общее значение этих двух интегралов. Можно показать, как и выше, что $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$. Это и доказывает наше предложение.

3. Формула Грина — Римана. Эта формула в некотором смысле обобщает соотношение (2.1): вместо того чтобы связывать значения некоторого интеграла со значениями некоторой функции, она связывает значения двойного интеграла и криволинейного интеграла.

Пусть A — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, γ — его граница, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывные функции, определенные в некоторой окрестности D прямоугольника A. Предположим, что эти функции имеют в области D непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда справедлива следующая формула Грина — Римана:

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{A} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{3.1}$$

Доказательство. Покажем, например, что

$$\int\limits_{\gamma} Q\,dy = \iint\limits_{A} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Мы знаем, что двойной интеграл от непрерывной функции $\frac{\partial Q}{\partial x}$ можно вычислять последовательно:

$$\iint\limits_{A} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{b_1}^{b_2} dy \left(\int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right).$$

Ясно, что

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = Q(a_2, y) - Q(a_1, y).$$

Интегрируя по переменной y, получаем

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} Q(a_2, y)\,dy - \int\limits_{b_1}^{b_2} Q(a_1, y)\,dy,$$

что в точности равно $\int\limits_{\gamma} Q\,dy$. Формула доказана.

Формула Грина — Римана справедлива и для областей, более общих, чем прямоугольник, но мы пока оставим этот вопрос в стороне.

Предложение 3.1. *Пусть* $\omega = P\,dx + Q\,dy$ — *дифференциальная форма в области* D, *причем частные производные* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *существуют и непрерывны в этой области. Тогда для того, чтобы форма* ω *имела примитивную в области* D, *необходимо выполнение условия*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3.2}$$

В случае когда область D — *открытый круг, это условие является и достаточным.*

Доказательство. Принимая во внимание формулу (3.1), видим, что из соотношения (3.2) следует равенство $\int_\gamma \omega = 0$, где путь γ представляет собой границу любого прямоугольника, содержащегося в области D, стороны которого параллельны осям координат. Если область D — открытый круг, то отсюда следует, что форма ω имеет примитивную (предложение 2.2). Обратно, пусть равенство $\int_\gamma \omega = 0$ справедливо для любого пути γ, который является границей некоторого прямоугольника A, содержащегося в области D, стороны которого параллельны осям координат. Тогда для любого такого прямоугольника

$$\iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy = 0. \tag{3.3}$$

Отсюда следует соотношение (3.2). Действительно, если непрерывная функция $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ не обращается тождественно в нуль в области D, то в этой области существует точка, в некоторой окрестности которой эта функция, например, положительна.

Соответственно интеграл

$$\iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy$$

положителен для прямоугольника A, содержащегося в этой окрестности, что противоречит предположению (3.3). Предложение 3.1, таким образом, доказано.

4. Замкнутые дифференциальные формы.

Определение. Назовем форму $\omega = P\,dx + Q\,dy$ с коэффициентами P и Q, непрерывными в области D, *замкнутой*, если для каждой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует окрестность, в которой форма ω имеет примитивную. Можно предположить, что эта окрестность есть круг с центром в точке (x_0, y_0). Тогда из результатов п. 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Для того чтобы дифференциальная форма ω с коэффициентами, непрерывными в области D, была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы для любого достаточно малого прямоугольника, содержащегося (вместе со своей границей) в области D, со сторонами, параллельными осям координат, выполнялось равенство $\int_\gamma \omega = 0$, где γ — граница этого прямоугольника.*

Если мы предположим, кроме того, что функции P и Q имеют непрерывные частные производные первого порядка, то необходимым и достаточным для замкнутости формы ω будет условие (3.2) .

Вследствие предложения 2.2 каждая замкнутая форма *в открытом круге* имеет примитивную.

Мы приведем теперь пример области D и формы ω, замкнутой в области D, которая не имеет примитивной в этой области.

Предложение 4.2. *Пусть D — область, состоящая из всех точек комплексной плоскости* **C** *кроме точки* 0. *Форма $\omega = dz/z$ замкнута в области D, но не имеет примитивной.*

Действительно, в окрестности любой точки $z_0 \neq 0$ каждая непрерывная ветвь функции $\log z$ есть однозначная функция, которая является примитивной формы dz/z в окрестности точки z_0. Следовательно, форма ω замкнута. Чтобы показать, что форма ω не имеет тем не менее примитивной в области D, достаточно найти замкнутый путь γ, содержащийся в области D, такой, что $\int_\gamma \frac{dz}{z} \neq 0$. Пусть

γ — единичная окружность с центром в начале координат, которая обходится в положительном направлении. Чтобы вычислить $\int\limits_\gamma \omega$, положим $z = e^{it}$, где t меняется от 0 до 2π; тогда

$$dz = ie^{it}dt, \quad \frac{dz}{z} = idt$$

и, следовательно,

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{2\pi} i\,dt = 2i\pi \neq 0, \tag{4.1}$$

что и требовалось доказать.

В данном примере форма ω комплексна.

Возьмем теперь мнимую часть формы ω. Поскольку

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx + i\,dy}{x + iy} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + i\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

дифференциальная форма

$$\operatorname{Im}\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

замкнута в плоскости с выколотым началом координат. Она не имеет примитивной, так как вследствие (4.1) имеет место равенство

$$\int\limits_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 2\pi,$$

где γ — единичная окружность, которая обходится в положительном направлении. В сущности, форма $\operatorname{Im}\omega$ представляет собой дифференциал *многозначной* (иными словами, имеющей несколько ветвей) функции $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ в плоскости с выколотым началом координат.

5. Изучение неоднозначных примитивных. Пусть ω — замкнутая форма, определенная в области D. Хотя форма ω может и не иметь (однозначной) примитивной в области D, мы определим сейчас, что мы будем понимать под *прими-*

тивной формы ω *вдоль пути* γ *в области* D. Такой путь определяется *непрерывным* отображением отрезка $I=[a, b]$ в область D (никакого предположения о его дифференцируемости мы не делаем).

Определение. Пусть $\gamma: [a, b] \to D$ — непрерывный путь в области D, и пусть ω — замкнутая дифференциальная форма в этой области. Назовем *примитивной формы* ω вдоль пути γ непрерывную функцию $f(t)$ (t пробегает отрезок $[a, b]$), удовлетворяющую следующему условию:

(П) *для любого* $\tau \in [a, b]$ *в некоторой окрестности точки* $\gamma(\tau) \in D$ *существует примитивная* F *формы* ω, *такая, что*

$$F(\gamma(t)) = f(t) \tag{5.1}$$

для значений t, *достаточно близких к* τ.

Теорема 1. *Такая примитивная* f *всегда существует и единственна с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство. Прежде всего, если f_1 и f_2 — две такие примитивные, то их разность $f_1(t) - f_2(t)$ вследствие (5.1) в окрестности каждой точки $\tau \in [a, b]$ представима в форме $F_1(\gamma(t)) - F_2(\gamma(t))$. Поскольку разность $F_1 - F_2$ двух примитивных формы ω постоянна, отсюда следует, что функция $f_1(t) - f_2(t)$ постоянна в окрестности каждой точки отрезка I. Мы называем такую функцию *локально-постоянной*. Но непрерывная и локально-постоянная функция на *связном* топологическом пространстве (в нашем случае на сегменте $I=[a, b]$) *постоянна*. Действительно, для любого числа u множество точек, в которых функция принимает значение u, одновременно открыто и замкнуто.

Нам осталось доказать существование непрерывной функции, удовлетворяющей условию (П).

Для каждой точки $\tau \in I$ существует окрестность V (в отрезке I), которая отображением $\gamma(t)$ переводится в открытый круг, где форма ω имеет примитивную F. Так как отрезок I компактен, можно выбрать конечную последовательность точек

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$$

таким образом, что для любого целого i, лежащего между 0 и n, отображение γ переводит отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ в открытый круг U_i, в котором существует примитивная F_i формы ω. Пересечение $U_i \cap U_{i+1}$ содержит точку $\gamma(t_{i+1})$, и, следовательно, не пусто; это пересечение связно, следовательно, функция $F_{i+1} - F_i$ постоянна в пересечении $U_i \cap U_{i+1}$. Поэтому, прибавляя к каждой примитивной F_i подходящую постоянную, можно, переходя от окрестности к окрестности, добиться того, чтобы примитивная F_{i+1} совпадала с F_i в пересечении $U_i \cap U_{i+1}$.

Пусть теперь $f(t)$ — функция, определенная формулой

$$f(t) = F_i(\gamma(t)) \quad \text{для} \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Очевидно, что функция $f(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию (П): это ясно для значений τ, отличных от t_i; проверить это для случаев, когда τ равно одному из t_i, предоставляется читателю.

Замечание. Предположим, что γ — кусочно-гладкий путь, т. е. что существует разбиение отрезка I, такое, что сужение отображения γ на каждый отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ непрерывно дифференцируемо. Тогда интеграл $\int_\gamma \omega$ определен и равен по определению

$$\sum_i \left(\int_{\gamma_i} \omega \right).$$

Если f — примитивная вдоль пути γ, то вследствие формулы (2.1) имеем соотношение

$$\int_{\gamma_i} \omega = f(t_{i+1}) - f(t_i).$$

Суммируя, получаем

$$\int_\gamma \omega = f(b) - f(a). \tag{5.2}$$

Это равенство приводит к определению $\int_\gamma \omega$ также и для *непрерывного пути* γ, без всяких предположений о его дифференцируемости, а именно, примем за *определение* интеграла соотношение (5.2); это допустимо, так как его правая часть не зависит от выбора примитивной f вдоль пути γ.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если замкнутый путь* γ *не проходит через начало координат, то интеграл* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z}$ *равен целому числу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Форма $\omega=\frac{dz}{z}$ замкнута. В доказательстве теоремы 1 можно взять в качестве примитивных F_i непрерывные ветви функции $\log z$. Тогда разность $f(b)-f(a)$ равна разности двух ветвей $\log z$ в точке $\gamma(a)=\gamma(b)$ и, следовательно, равняется $2\pi in$ где n — целое.

С л е д с т в и е. *Интеграл* $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ *равен целому числу* (доказывается аналогично).

Величину $\int\limits_{\gamma}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ часто называют *изменением аргумента* точки $z=x+iy$, когда эта точка описывает путь γ (причем путь γ не обязательно замкнут).

6. Гомотопия. Для простоты все пути, которые мы будем рассматривать, будут параметризованы единичным отрезком $I=[0,1]$.

О п р е д е л е н и е. Мы скажем, что два пути

$$\gamma_0: I\to D \quad \text{и} \quad \gamma_1: I\to D,$$

имеющие одинаковые начала и концы (т. е. $\gamma_0(0)=\gamma_1(0)$, $\gamma_0(1)=\gamma_1(1)$), *гомотопны* (в области D) как пути с *неподвижными концами*, если существует непрерывное отображение $(t,u)\to\delta(t,u)$ квадрата $I\times I$ в область D, такое, что

$$\left.\begin{aligned}&\delta(t,0)=\gamma_0(t), && \delta(t,1)=\gamma_1(t),\\ &\delta(0,u)=\gamma_0(0)=\gamma_1(0), && \delta(1,u)=\gamma_0(1)=\gamma_1(1).\end{aligned}\right\}\tag{6.1}$$

При фиксированном u отображение $t\to\delta(t,u)$ есть путь γ_u в области D, имеющий то же самое начало, что и пути

γ_0 и γ_1, и тот же самый конец, что и пути γ_0 и γ_1. Интуитивно, этот путь непрерывно деформируется, когда u меняется от 0 до 1, при этом концы пути остаются неподвижными.

Аналогичное определение можно дать в случае двух *замкнутых путей* γ_0 и γ_1: мы скажем, что они *гомотопны* в области D *как замкнутые пути*, если существует непрерывное отображение $(t, u) \to \delta(t, u)$ квадрата $I \times I$ в область D, такое, что

$$\left.\begin{array}{ll} \delta(t, 0) = \gamma_0(t), & \delta(t, 1) = \gamma_1(t), \\ \delta(0, u) = \delta(1, u) & \text{для любого } u \end{array}\right\} \tag{6.2}$$

(следовательно, для каждого u путь γ_u замкнут). В частности, мы скажем, что замкнутый путь γ_0 *стягивается в точку* в области D, если в условиях предыдущего определения функция $\gamma_1(t)$ постоянна.

Теорема 2. *Если пути γ_0 и γ_1 гомотопны в области D как пути с неподвижными концами, то*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

для любой замкнутой формы ω в области D.

Теорема 2'. *Если замкнутый путь γ стягивается в точку в области D, то*

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

для любой замкнутой формы ω в области D.

Обе эти теоремы можно получить как следствие некоторой леммы, которая будет сейчас изложена. Дадим сначала одно определение.

Определение. Пусть $(t, u) \to \delta(t, u)$ — непрерывное отображение прямоугольника

$$a \leqslant t \leqslant b, \quad a' \leqslant u \leqslant b' \tag{6.3}$$

в область D, а ω — замкнутая форма в этой области. Назовем *примитивной формы ω относительно отображения δ функцию $f(t, u)$, непрерывную* в прямоугольнике и удовлетворяющую следующему условию:

(П′) *для любой точки* (τ, ν) *этого прямоугольника в некоторой окрестности точки* $\delta(\tau, \nu)$ *существует примитивная* F *формы* ω, *такая, что*

$$F(\delta(t, u)) = f(t, u)$$

для всех точек (t, u), *достаточно близких к* (τ, ν).

Лемма. *Такая примитивная всегда существует и единственна с точностью до постоянной.*

Эта лемма есть в некотором смысле расширение теоремы 1. Докажем ее аналогичным способом. Используя компактность прямоугольника, можно разбить его на четырехугольники, подразделяя интервал изменения t точками t_i и интервал изменения u точками u_j таким образом, чтобы для любых i и j отображение δ переводило прямоугольник, образованный отрезками $[t_i, t_{i+1}]$ и $[u_j, u_{j+1}]$, в открытый круг U_{ij}, в котором форма ω имеет примитивную F_{ij}.

Фиксируем j. Поскольку пересечение $U_{ij} \cap U_{i+1, j}$ непусто (и связно), можно к каждой примитивной F_{ij} (j фиксировано, i переменно) прибавить постоянную таким образом, что функции F_{ij} и $F_{i+1, j}$ будут совпадать в пересечении $U_{i, j} \cap U_{i+1, j}$. Тем самым для $u \in [u_j, u_{j+1}]$ получим функцию $f_j(t, u)$, причем для любого i

$$f_j(t, u) = F_{i, j}(\delta(t, u)), \quad \text{где} \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Таким образом, функция $f_j(t, u)$ непрерывна в прямоугольнике

$$a \leqslant t \leqslant b, \quad u_j \leqslant u \leqslant u_{j+1}$$

и является примитивной формы ω относительно отображения δ_j, где δ_j — сужение отображения δ на этот прямоугольник. Каждая примитивная f_j определена однозначно с точностью до постоянной.

Теперь можно последовательно для каждого j выбрать эти постоянные так, чтобы функции $f_j(t, u)$ и $f_{j+1}(t, u)$ были бы равны при $u = u_{j+1}$.

Определим в прямоугольнике (6.3) функцию $f(t, u)$ следующим образом: для всякого j

$$f(t, u) = f_j(t, u) \text{ при } u \in [u_j, u_{j+1}].$$

Эта функция непрерывна и удовлетворяет условию (П′), следовательно, она является примитивной формы ω относительно отображения δ. Лемма, таким образом, доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть δ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию (6.1). Пусть f — примитивная формы ω оносительно δ. Очевидно, что функция f постоянна на вертикальных сторонах $t=0$ и $t=1$ прямоугольника $I\times I$. Следовательно,

$$f(0,\ 0)=f(0,\ 1),\quad f(1,\ 0)=f(1,\ 1)$$

и, так как

$$\int_{\gamma_0}\omega=f(1,0)-f(0,0),\quad \int_{\gamma_1}\omega=f(1,\ 1)-f(0,\ 1),$$

теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 2′ совершенно аналогично, только отображение δ должно удовлетворять условию (6.2).

7. Примитивная в односвязной области.

Определение. Назовем область D *односвязной*, если любой замкнутый путь в области D стягивается в точку.

Теорема 3. *Всякая замкнутая дифференциальная форма ω в односвязной области D имеет примитивную в этой области.*

Действительно, по теореме 2′ для всякого замкнутого пути γ в области D справедливо равенство $\int_\gamma \omega=0$; отсюда следует, в силу предложения 2.1, что форма ω имеет примитивную в области D. В частности, во всякой односвязной области, не содержащей $z=0$, замкнутая форма $\frac{dz}{z}$ имеет примитивную, иначе говоря, функция $\log z$ *имеет однозначную непрерывную ветвь во всякой односвязной области, не содержащей $z=0$.*

Примеры односвязных областей. Множество E точек плоскости называется *звездным* по отношению к одной из своих точек a, если для любой точки $z\in E$ отрезок, соединяющий a и z, целиком содержится в E.

Всякая область D, звездная по отношению к одной из своих точек a, односвязна.

Действительно, для каждого действительного числа u, расположенного между 0 и 1, гомотетия с центром a и коэффициентом u переводит область D в себя. Когда u меняется от 1 до 0, эта гомотетия определяет гомотопию, переводящую каждую замкнутую кривую в точку.

В частности, *всякая выпуклая область D односвязна.* В самом деле, выпуклая область звездна по отношению к любой из своих точек. Напротив, плоскость с выколотой точкой *не односвязна*: например, окружность $|z| = 1$ не стягивается в точку в области $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, поскольку интеграл $\int \frac{dz}{z}$ замкнутой формы $\frac{dz}{z}$ вдоль этой окружности не равен 0 [ср. соотношение (4.1)].

В качестве упражнения читатель может доказать эквивалентность следующих четырех свойств области D:

а) D односвязна;

б) всякое непрерывное отображение окружности $|z| = 1$ в область D можно продолжить до непрерывного отображения круга $|z| \leqslant 1$ в область D;

в) всякое непрерывное отображение границы квадрата в область D можно продолжить до непрерывного отображения квадрата в область D;

г) если два пути в области D имеют одинаковые концы, то они гомотопны как пути с неподвижными концами.

8. Индекс замкнутого пути.

Определение. Пусть γ — замкнутый путь в плоскости $\mathbf{C}$, a — точка плоскости $\mathbf{C}$, не принадлежащая образу при отображении γ. Назовем *индексом* пути γ по отношению к точке a (обозначается $I(\gamma, a)$) значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}. \tag{8.1}$$

Согласно предложению 5.1, индекс $I(\gamma, a)$ всегда является *целым числом*.

Возвращаясь к определению, мы видим, что для вычисления индекса нужно найти непрерывную функцию $f(t)$

с комплексными значениями, определенную при $0 \leqslant t \leqslant 1$, такую, что

$$e^{f(t)} = \gamma(t) - a;$$

тогда

$$I(\gamma, a) = \frac{f(1) - f(0)}{2\pi i}.$$

Свойства индекса.

1) *При фиксированной точке a индекс $I(\gamma, a)$ остается постоянным, когда путь γ непрерывно деформируется, но при этом не проходит через точку a.* Действительно, интеграл (8.1) при деформации изменяется непрерывно, но принимает только целые значения, следовательно, он остается постоянным.

2) *При фиксированном пути γ индекс $I(\gamma, a)$ есть локально постоянная функция переменной a, определенная на дополнении к образу при отображении γ.* Доказательство то же, что и в 1). Отсюда следует, что функция $I(\gamma, a)$ *постоянна* на каждой связной компоненте дополнения к образу при отображении γ.

3) *Если образ при отображении γ содержится в односвязной области D, не содержащей точки a, то индекс $I(\gamma, a)$ равен нулю.* Действительно, замкнутый путь γ можно деформировать в точку, оставаясь внутри области D, а следовательно, не проходя через точку a. Остается применить свойство 1).

4) *Если путь γ представляет собой окружность, пробегаемую в положительном направлении, то индекс $I(\gamma, a)$ равен 0, когда точка a лежит вне окружности, и равен 1, когда точка a лежит внутри окружности.* Если точка a лежит вне окружности, то это свойство представляет собой частный случай свойства 3); если же точка a лежит внутри окружности, достаточно, в силу свойства 2), рассмотреть случай, когда точка a является ее центром, а затем применить соотношение (4.1).

Предложение 8.1. *Пусть f — непрерывное отображение замкнутого круга $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ в плоскость $\mathbf{R}^2$, а γ — сужение f на окружность $x^2 + y^2 = r^2$. Если точка a плоскости не принадлежит образу при отображении γ*

и индекс $I(\gamma, a)$ не равен нулю, то отображение f переводит в точку a по крайней мере одну точку открытого круга $x^2 + y^2 < r^2$.

В самом деле, предположим противное, т. е. что точка a не принадлежит образу при отображении f. Сужение отображения f на концентрические окружности с центром в нуле определяет непрерывную деформацию замкнутого пути γ в некоторую точку. Следовательно, интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$ равен нулю, что противоречит условию.

Определение. Пусть γ_1 и γ_2 — замкнутые пути, не проходящие через начало координат 0. Мы назовем *произведением* этих двух путей замкнутый путь, заданный отображением

$$t \to \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t),$$

где $\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$ — произведение комплексных чисел $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$.

Предложение 8.2. *Индекс произведения двух замкнутых путей, не проходящих через точку 0, относительно начала координат равен сумме индексов этих замкнутых путей. Иначе говоря,*

$$I(\gamma_1\gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0).$$

Действительно, пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — непрерывные функции с комплексными значениями, такие, что

$$e^{f_1(t)} = \gamma_1(t), \qquad e^{f_2(t)} = \gamma_2(t).$$

Пусть $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$ — произведение этих двух замкнутых путей, тогда функция $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ удовлетворяет равенству

$$e^{f(t)} = \gamma(t)$$

и, следовательно,

$$I(\gamma, 0) = \frac{f(1) - f(0)}{2\pi i} = \frac{f_1(1) - f_1(0)}{2\pi i} + \frac{f_2(1) - f_2(0)}{2\pi i} =$$

$$= I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0),$$

что и требовалось доказать.

Предложение 8.3. *Пусть γ и γ_1 — замкнутые пути в плоскости* $\mathbf{C}$. *Если путь γ не проходит через* 0 *и если неравенство $|\gamma_1(t)| < |\gamma(t)|$ справедливо для всех t, то путь $t \to \gamma(t) + \gamma_1(t)$ не проходит через начало координат и*

$$I(\gamma+\gamma_1, 0) = I(\gamma, 0).$$

Действительно, можно записать

$$\gamma(t)+\gamma_1(t) = \gamma(t)\cdot\left(1+\frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)}\right).$$

Замкнутый путь $t \to 1 + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)}$ имеет индекс нуль относительно начала координат, поскольку он содержится в открытом круге радиуса 1 с центром в точке 1. Замкнутый путь $\gamma + \gamma_1$ является произведением замкнутых путей γ и $1 + \frac{\gamma_1}{\gamma}$; применяя предложение 8.2, получаем требуемое утверждение.

9. Дополнение: ориентированная граница компакта.

Лемма. *Если γ — гладкий путь и производная γ' нигде не обращается в нуль, то в окрестности каждого значения параметра t отображение $t \to \gamma(t)$ представляет собой вложение и его образ делит (локально) плоскость на две области.*

Точный смысл последнего утверждения будет установлен в процессе доказательства. Пусть $t \to \gamma(t)$ — гладкое отображение отрезка $[a, b]$ в плоскость $\mathbf{R}^2$, причем производная $\gamma'(t)$ не обращается в нуль нигде на отрезке $[a, b]$. Это значит, что координаты x, y точки $\gamma(t)$ представляют собой непрерывно дифференцируемые функции $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, а их производные $\gamma_1'(t)$, $\gamma_2'(t)$ не обращаются в нуль одновременно.

Из теоремы о неявной функции следует, что для всякой внутренней точки t_0 отрезка $[a, b]$ (т. е. для $a < t_0 < b$) существует гладкое отображение $(t, u) \to \delta(t, u)$ окрестности U точки $(t_0, 0)$ на окрестность V точки $(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\delta(t, 0) = \gamma(t)$,

То есть взаимно однозначное отображение «в» — *Прим. ред.*

(2) отображение δ является гомеоморфизмом окрестности U на окрестность V, якобиан которого положителен в каждой точке окрестности U (иными словами, отображение δ сохраняет ориентацию).

Таким образом, при гомеоморфизме, обратном отображению δ, окрестность V гомеоморфно отображается на U, причем точки пути γ переходят в точки прямой $u = 0$.

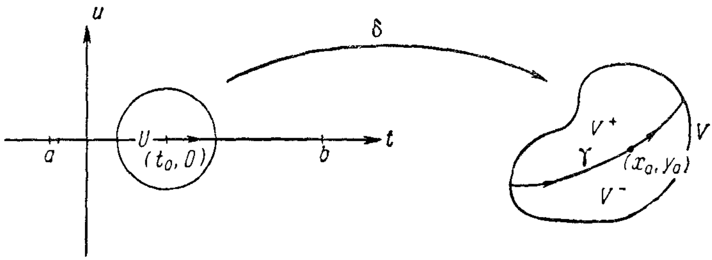


Рис. 2.

Точки дополнения к кривой γ в окрестности V разделяются, следовательно, на два открытых множества V^+ и V^-: первому соответствует $u > 0$, второму $u < 0$. Если в качестве окрестности U взят открытый круг с центром в точке $(t_0, 0)$, то множества V^+ и V^- связны. Таким образом, путь γ делит окрестность V на две связные компоненты, как и утверждает лемма.

Определение. Пусть K — компакт плоскости $\mathbf{C}$, а $\Gamma = (\Gamma_i)_{i \in I}$ — конечное множество кусочно-гладких *замкнутых* путей Γ_i. Будем называть Γ *ориентированной границей* компакта K, если выполнены следующие условия:

(ОГ1) Для каждого отображения $t \to \Gamma_i(t)$ образы двух различных точек различны, исключение составляют только начало и конец отображаемого отрезка. Более того, образы различных Γ_i попарно не пересекаются и их объединение составляет *границу* компакта K.

(ОГ2) Если γ — гладкая дуга одного из путей Γ_i, то производная $\gamma'(t)$ нигде не обращается в нуль. Если же t_0 лежит внутри отрезка, на котором определена γ, и если окрестность V в предыдущей лемме выбрана достаточно

6 *

малой, то *компонента* V^- *не пересекается с компактом* K, *а компонента* V^+ *содержится внутри* K.

Наглядно условие (ОГ2) можно представить себе следующим образом: если путь γ пробегается в направлении возрастания параметра t, то *слева* от него находятся внутренние точки компакта K, а справа — точки дополнения к K.

Пример. Возьмем в качестве K замкнутый прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат. Тогда периметр этого прямоугольника, определенный в п. 1, служит *ориентированной границей* прямоугольника K.

Примем без доказательства, что формула Грина — Римана применима к ориентированной границе Γ компакта K. Более точно, если $\omega = P\,dx + Q\,dy$ — дифференциальная форма с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами в области, содержащей компакт K, то справедливо равенство

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{9.1}$$

$\Big($символ $\int_\Gamma$ обозначает $\sum_i \int_{\Gamma_i}$, если граница Γ состоит из замкнутых путей $\Gamma_i\Big)$.

В частности, *для замкнутой формы* ω *в области* D *справедливо соотношение*

$$\int_\Gamma \omega = 0, \tag{9.2}$$

если Γ *является ориентированной границей некоторого компакта, содержащегося в области* D.

§ 2. ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ; ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Понятие дифференцируемой функции. Пусть D — область плоскости $\mathbf{R}^2$, и пусть $f(x, y)$ — функция, определенная в D и принимающая действительные или комплексные значения. Мы скажем, что функция f *дифференцируема* в точке $(x_0, y_0) \in D$, если существует линейная функция $ah + bk$ действительных переменных h и k, такая, что для любых достаточно малых значений h и k справедливо равенство

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=ah+bk+\alpha\sqrt{h^2+k^2}. \qquad (1.1)$$

Здесь α — скалярная (действительная или комплексная) функция переменных h и k, абсолютная величина которой стремится к нулю, когда $\sqrt{h^2+k^2}$ стремится к нулю. Если f дифференцируема в точке $(x_0,\ y_0)$, то действительные или комплексные постоянные a и b определены единственным образом и равны частным производным

$$a=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0), \qquad b=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0).$$

Напомним, что существования частных производных функции f в точке $(x_0,\ y_0)$ недостаточно для того, чтобы функция была дифференцируема в этой точке. Однако если частные производные существуют в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ и непрерывны в этой точке, то функция f дифференцируема в точке $(x_0,\ y_0)$. Функция, имеющая непрерывные частные производные в области D, называется непрерывно дифференцируемой в этой области.

2. Условие голоморфности. Пусть D — область комплексной плоскости $\mathbf{C}$, а f — функция комплексного переменного $z=x+iy$, определенная в D.

Определение. Функция $f(z)$ называется *голоморфной* в точке $z_0\in D$, если существует предел

$$\lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}}\frac{f(z_0+u)-f(z_0)}{u} \qquad (2.1)$$

(u — переменное комплексное число). Это же свойство функции f можно выразить иначе: функция f имеет в точке z_0 *производную по комплексному переменному*. Функция f называется голоморфной в области D, если она голоморфна в каждой точке этой области.

Условие (2.1) можно записать так:

$$f(z_0+u)-f(z_0)=cu+\alpha(u)\,|u|, \qquad (2.2)$$

где $\alpha(u)$ стремится к нулю, когда u стремится к нулю, а c — производная $f'(z_0)$. Поскольку $z=x+iy$, соотношение (2.2) запишется так:

$$f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)=c(h+ik)+\alpha(h, k)\sqrt{h^2+k^2}. \quad (2.3)$$

Это показывает, что f, рассматриваемая как функция двух действительных переменных x и y, дифференцируема и что

$$a=c, \quad b=ic,$$

где a и b — постоянные из соотношения (1.1). Следовательно, справедливы равенства $\frac{\partial f}{\partial x}=c$, $\frac{\partial f}{\partial y}=ic$, откуда

$$\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0. \quad (2.4)$$

Обратно, пусть f — дифференцируемая функция действительных переменных x и y, удовлетворяющая соотношению (2.4).

Тогда из соотношения (1.1) следует соотношение (2.3), в котором $c=a=-ib$. Следовательно, функция f голоморфна в точке $z_0=x_0+iy_0$.

Мы доказали, следовательно, такое предложение.

Предложение 2.1. *Для того чтобы функция f была голоморфна в некоторой точке, необходимо и достаточно, чтобы функция f, рассматриваемая как функция действительных переменных x и y, была дифференцируема в этой точке и ее частные производные в этой точке были связаны соотношением* (2.4).

Поясним смысл соотношения (2.4). Если мы положим $f=P+iQ$, где функции P и Q действительны, то получим из (2.4) условия Коши:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}\text{[1]}. \quad (2.5)$$

3. Введение переменных z и $\bar{z}$. Пусть функция f (принимающая действительные или комплексные значения) дифференцируема по действительным переменным x и y.

Рассмотрим дифференциал

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy. \quad (3.1)$$

[1]) Эти условия называют также условиями Коши—Римана или Даламбера — Эйлера. — *Прим. ред.*

В частности, функции $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ имеют дифференциалы

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i\,dy, \tag{3.2}$$

а следовательно,

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}). \tag{3.3}$$

Подставив эти выражения в (3.1), получим соотношение

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z}.$$

Теперь естественно ввести символы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3.4}$$

и тогда последнее соотношение примет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \tag{3.5}$$

Условие (2.4), являющееся условием голоморфности функции f комплексного переменного z, запишется тогда так:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{3.6}$$

Иначе говоря, для того чтобы функция f была голоморфна, необходимо и достаточно, чтобы в выражении (3.5) дифференциала df коэффициент при $d\bar{z}$ обращался в нуль; или иначе, дифференциал df должен быть пропорционален dz, причем коэффициент пропорциональности есть просто производная $f'(z)$.

В качестве примера применения предыдущих рассуждений докажем следующий результат:

Пусть функция f голоморфна в области D; если действительная часть функции f постоянна, то и сама функция f постоянна.

В самом деле, действительная часть $\operatorname{Re} f$ — не что иное, как $\frac{1}{2}(f + \bar{f})$. По предположению, в области D

справедливо равенство $d(f+\bar{f})=0$, которое можно переписать так:

$$\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}+\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}dz+\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}=0.$$

Но так как функция f голоморфна, то $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$. Переходя к комплексно-сопряженным величинам, получим $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}=0$.

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}d\bar{z}=0.$$

Но выражение $a\,dz+b\,d\bar{z}$ может тождественно равняться нулю только когда коэффициенты a и b равны нулю, отсюда $\frac{\partial f}{\partial z}=0$, $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}=0$.

Таким образом, $df=0$ и функция f постоянна в области D.

Отсюда выводим, что *если функция f голоморфна и отлична от нуля в области D и если* $\log|f|$ *или* $\arg f$ *постоянен, то функция f постоянна.*

Действительно, рассмотрим функцию

$$g(z)=\log f(z)=\log|f(z)|+i\arg f(z).$$

В окрестности каждой точки z_0 мы можем выбрать определенную ветвь аргумента. Функция g в этой окрестности голоморфна и ее действительная (или мнимая) часть постоянна. Следовательно, функция g постоянна в окрестности точки z_0. Таким образом, функция $f=e^g$ локально постоянна в области D и, следовательно, постоянна, так как область D связна.

4. Теорема Коши.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ голоморфна в области D комплексной плоскости, то дифференциальная форма $f(z)\,dz$ замкнута в D.*

Ввиду важности этой теоремы мы дадим два ее доказательства.

Первое доказательство. Это доказательство требует одного дополнительного предположения. Мы будем считать, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в области D (в действительности, как следует из второго доказательства, это предположение автоматически выполнено, когда f — голоморфная функция). Чтобы убедиться в том, что дифференциальная форма $f(z)\,dz = f(z)\,dx + if(z)\,dy$ замкнута, достаточно вследствие формулы Грина — Римана [§ 1, формула (3.1)] проверить выполнение равенства

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x}.$$

А это равенство есть не что иное, как условие (2.4), которое выражает голоморфность функции f. Доказательство закончено.

Второе доказательство. Это доказательство в противоположность первому не нуждается ни в каком дополнительном предположении, однако оно требует более тонких рассуждений.

Чтобы доказать, что форма $f(z)\,dz$ замкнута, мы должны показать, что интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$, вдоль границы γ произвольного прямоугольника R, содержащегося в области D, равен нулю. Для этого введем обозначение

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \alpha(R). \tag{4.1}$$

Разделим прямоугольник R на четыре равных прямоугольника, деля каждую из его сторон на две равные части. Пусть γ_i — ориентированные границы четырех прямоугольных частей ($i = 1, 2, 3, 4$). Легко убеждаемся в том (см. рис. 3), что

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{\gamma_i} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{4} \alpha(R_i).$$

Следовательно, среди этих четырех прямоугольников найдется по крайней мере один такой, что $|\alpha(R_i)| \geqslant \frac{1}{4}|\alpha(R)|$. Назовем этот прямоугольник $R^{(1)}$. Разделим снова прямоугольник $R^{(1)}$ на четыре равные части. По крайней мере одна из них, пусть $R^{(2)}$, удовлетворяет условию

$$|\alpha(R^{(2)})| \geqslant \frac{1}{4^2}|\alpha(R)|.$$

Эту операцию можно повторять сколько угодно раз. Получаем, таким образом, последовательность вложенных прямоугольников. Стороны прямоугольника $R^{(k)}$ в 2^k раз

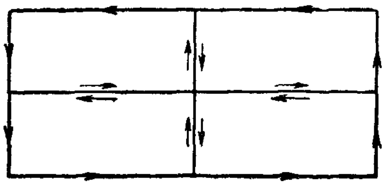


Рис. 3.

меньше сторон прямоугольника R, а его площадь в 4^k раз меньше площади прямоугольника R. Если $\gamma(R^{(k)})$ — ориентированная граница прямоугольника $R^{(k)}$, то

$$\left| \int\limits_{\gamma(R^{(k)})} f(z)\,dz \right| \geqslant \frac{1}{4^k}|\alpha(R)|. \tag{4.2}$$

Согласно критерию сходимости Коши, существует единственная точка z_0, общая для всех прямоугольников $R^{(k)}$. Очевидно, $z_0 \in D$. Поэтому $f(z)$ голоморфна в точке z_0 и, следовательно,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|,$$

причем

$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{\gamma(R^{(k)})} f(z)\,dz = f(z_0) \int\limits_{\gamma(R^{(k)})} dz + f'(z_0) \int\limits_{\gamma(R^{(k)})} (z-z_0)\,dz + \\ + \int\limits_{\gamma(R^{(k)})} \varepsilon(z)|z-z_0|\,dz. \qquad (4.3)$$

В правой части равенства (4.3) два первых интеграла равны нулю, а третий является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с площадью прямоугольника $R^{(k)}$, т. е. с $1/4^k$, когда k неограниченно возрастает. Сопоставляя это с неравенством (4.2), мы видим, что число $\alpha(R)$ должно равняться нулю. Таким образом, $\int f(z)\,dz = 0$. Это завершает доказательство.

Следствие 1. *Функция $f(z)$, голоморфная в области D, локально обладает примитивной, которая голоморфна.*

Это означает, что для любой точки области D существует окрестность, в которой функция f имеет голоморфную примитивную. Локальное существование примитивной следует из определения замкнутой формы. Эта локальная примитивная голоморфна, так как функция f является ее производной.

Следствие 2. *Для всякой голоморфной функции $f(z)$ в области D справедливо равенство $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$, где γ замкнутый путь, стягиваемый в точку в области D.*

Это следует из теоремы 1 этого параграфа и теоремы 2′ из п. 6 § 1.

Обобщение. В действительности условие, при котором справедлива теорема 1, можно ослабить.

Теорема 1′. *Пусть непрерывная функция $f(z)$ голоморфна в каждой точке области D, кроме, может быть, точек, лежащих на прямой Δ, параллельной действительной оси. Тогда форма $f(z)\,dz$ замкнута. В частности, если функция f голоморфна в каждой точке области D*

кроме, может быть, изолированных точек, то форма $f(z)\,dz$ замкнута.

Доказательство. Нам нужно доказать, что интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$, взятый по границе γ всякого прямоугольника, содержащегося в области D, равен нулю. Это очевидно, если прямоугольник не пересекается с прямой Δ. Предположим, что одна сторона прямоугольника лежит на прямой Δ. Пусть u, $u+a$, $u+ib$, $u+a+ib$ — четыре вершины прямоугольника, причем точки u и $u+a$ лежат на прямой Δ, a и b действительны и, например, $b>0$. Пусть $R(\varepsilon)$ — прямоугольник, имеющий вершинами точки

$$u+i\varepsilon,\ u+a+i\varepsilon,\ u+ib,\ u+a+ib,$$

где ε — достаточно малое положительное число. Интеграл $\int f(z)\,dz$, взятый по границе $R(\varepsilon)$, равен нулю, однако, когда ε стремится к нулю, этот интеграл стремится к интегралу, взятому по границе γ прямоугольника R. Следовательно, $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=0$. Наконец, если прямая Δ пересекает прямоугольник R, не проходя по его горизонтальной стороне, то эта прямая делит прямоугольник R на два прямоугольника R' и R''. Интеграл $\int f(z)\,dz$, взятый по границе каждого из прямоугольников R' и R'', равен нулю, в силу предыдущего, однако сумма этих интегралов равна интегралу $\int f(z)\,dz$, взятому по границе прямоугольника R. Это завершает доказательство.

5. Интегральная формула Коши.

Теорема 2. *Пусть f — голоморфная функция в области D. Пусть $a \in D$ и γ — замкнутый путь в области D, не проходящий через точку a и стягиваемый в точку в области D. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)\,dz}{z-a}=I(\gamma, a)\,f(a), \tag{5.1}$$

где $I(\gamma, a)$ обозначает индекс замкнутого пути γ относительно точки a (см. § 1, п. 8).

Доказательство. Определим в области D функцию $g(z)$ следующим образом:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{для} \quad z \neq a, \\ f'(a) & \text{для} \quad z = a. \end{cases}$$

Функция g непрерывна, в силу определения производной. Она голоморфна в любой точке области D, кроме точки a.

По теореме 1' имеем

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz = 0.$$

Однако

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(a)\, dz}{z-a} = I(\gamma, a) f(a)$$

по определению индекса. Тем самым соотношение (5.1) доказано.

Пример. Пусть f — голоморфная функция в окрестности замкнутого круга, и пусть γ — граница круга, пробегаемая в положительном направлении. Тогда

$$\int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i f(a), & \text{если точка } a \text{ лежит внутри круга,} \\ 0, & \text{если точка } a \text{ лежит вне круга.} \end{cases}$$

6. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в открытом круге $|z| < \varrho$; тогда f разлагается в степенной ряд в этом круге.*

Это означает, что существует степенной ряд $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, радиус сходимости которого больше или равен ϱ и сумма которого $S(z)$ равна $f(z)$ при $|z| < \varrho$.

Доказательство. Пусть $r < \varrho$. Найдем степенной ряд, нормально[1]) сходящийся к функции $f(z)$

[1]) Определение см. на стр. 22. — *Прим. ред.*

при $|z| \leqslant r$. Этот ряд не будет зависеть от r, в силу единственности разложения функции в степенной ряд в окрестности нуля. Тем самым теорема будет доказана.

Выберем r_0, такое, что $r < r_0 < \varrho$. Применим теперь интегральную формулу теоремы 2, взяв в качестве пути γ окружность с центром 0 и радиусом r_0, пробегаемую в положительном направлении. Получим, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z} \quad \text{при} \quad |z| \leqslant r.$$

Функцию $\frac{1}{t-z}$, стоящую под знаком интеграла, можно разложить в ряд в области $|z| < |t|$, а именно

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1-z/t} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{z}{t} + \ldots + \frac{z^n}{t^n} + \ldots\right),$$

следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n \geqslant 0} z^n \frac{f(t)}{t^{n+1}}\, dt.$$

Этот ряд нормально сходится при $|z| \leqslant r$ и $|t| = r_0$, поэтому его можно интегрировать почленно. Получим ряд, нормально сходящийся при $|z| \leqslant r$,

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n,$$

где коэффициенты a_n заданы интегралами

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}}. \tag{6.1}$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Теорема 3 показывает, что всякая функция, голоморфная в области D, является *аналитической* в этой области. Обратно, всякая аналитическая функция в области D голоморфна в той же области, поскольку известно, что аналитическая функция имеет производную. Таким образом, для функций *комплексного* переменного понятия *голоморфности* и *аналитичности* эквивалентны.

Применяя к голоморфным функциям результаты, известные для аналитических функций, мы видим, что *голо-*

морфная функция бесконечно дифференцируема, в частности непрерывно дифференцируема, и что *производная голоморфной функции голоморфна*.

7. Теорема Мореры.

Теорема 4 (обратная к теореме 1). *Пусть $f(z)$ — непрерывная функция в области D. Если дифференциальная форма $f(z)\,dz$ замкнута, то функция $f(z)$ голоморфна в области D.*

Действительно, функция f локально обладает примитивной g. Эта примитивная голоморфна, а значит, ее производная f, как было замечено выше, также голоморфна.

Следствие. *Если функция $f(z)$ непрерывна в области D и голоморфна в каждой точке этой области кроме, может быть, точек, лежащих на прямой Δ, то эта функция f голоморфна в каждой точке области D без исключения.*

Действительно, поворачивая, если необходимо, плоскость $\mathbf{C}$, можно сделать прямую Δ параллельной действительной оси. По теореме 1′ форма $f(z)\,dz$ замкнута. Следовательно, по теореме 4, функция f голоморфна в каждой точке области D.

Мы видим, что теорема 1′ есть только кажущееся обобщение теоремы 1. Однако нам пришлось ее сформулировать из соображений технического характера.

8. Вариант интегральной формулы Коши.

Теорема 5. *Пусть Γ — ориентированная граница компакта K, содержащегося в области D, и пусть $f(z)$ — голоморфная функция в D. Тогда*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Если, кроме того, точка a лежит внутри компакта K, то

$$\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 2\pi i f(a). \tag{8.1}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из соотношения (9.1) § 1.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим достаточно малый открытый круг S с центром a, содержащийся вместе с границей внутри K. Ориентированная граница компакта $K \setminus S$ состоит из Γ и окружности, ограничивающей круг S, которая пробегается в отрицательном направлении. Мы скажем, что эта граница есть *разность* границы Γ и окружности γ, ограничивающей круг S, которая пробегается в положительном направлении.

Применяя первую часть теоремы 5 к компакту $K \setminus S$ и функции $\frac{f(z)}{z-a}$, которая голоморфна в области $D \setminus \{a\}$, получаем равенство

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-a},$$

откуда, в силу теоремы 2, следует соотношение (8.1).

9. Принцип симметрии Шварца. Мы уже видели (следствие теоремы 4), что если функция $f(z)$ непрерывна в области D и голоморфна в каждой ее точке кроме, может быть, точек действительной оси, то функция f голоморфна в каждой точке области D без исключения.

Рассмотрим непустую область D, *симметричную относительно действительной оси*. Пусть D'— пересечение D с замкнутой полуплоскостью $y \geqslant 0$, и пусть D''— пересечение области D с полуплоскостью $y \leqslant 0$. Предположим, что функция $f(z)$ непрерывна в D', принимает действительные значения в точках действительной оси и голоморфна в тех точках D', где $y > 0$. Покажем, что *в области D существует голоморфная функция, которая продолжает f*. Эта функция единственна, в силу принципа аналитического продолжения (см. гл. I, § 4, п. 3).

Рассмотрим в области D'' функцию $g(z)$, определенную соотношением

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Эта функция непрерывна в области D'' и легко проверить, что она голоморфна в любой точке области D'', не лежащей на действительной оси. Функция $h(z)$, равная функции $f(z)$ в области D' и функции $g(z)$ в области D'', непрерывна в области D и голоморфна в любой точке этой области, не лежащей на действительной оси. Она, следовательно, голоморфна в каждой точке области D без исключения.

Заметим, что функция h принимает комплексно-сопряженные значения (т. е. значения, симметричные относительно действительной оси) в двух точках области D, симметричных относительно действительной оси. Вот почему эта конструкция называется «принципом симметрии».

УПРАЖНЕНИЯ

1. а) Пусть γ — кусочно-гладкий путь, а $\bar{\gamma}$ — образ пути γ при отображении $z \to \bar{z}$ (симметрия относительно действительной оси). Показать, что если функция $f(z)$ непрерывна на пути γ, то функция $z \to \overline{f(\bar{z})}$ непрерывна на пути $\bar{\gamma}$ и

$$\overline{\int_{\gamma} f(z)\,dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})}\,dz.$$

б) В частности, если γ — единичный круг, пробегаемый в положительном направлении, то

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\,dz} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\,\frac{dz}{z^2}.$$

2. Пусть γ — непрерывный путь (не обязательно кусочно-гладкий). Показать, что

$$\int_{\gamma} (\omega_1 + \omega_2) = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2,$$

$$\int_{\gamma} a\omega = a \int_{\gamma} \omega,$$

где ω_1, ω_2, ω — замкнутые формы, $a \in \mathbf{C}$. (Определение символа $\int_{\gamma} \omega$ см. в замечании из § 1, п. 5.)

3. Пусть γ — кусочно-гладкий путь в области D и $\varphi(z)$ — функция, голоморфная в области D, принимающая значения в области Δ (в плоскости комплексного переменного w).

Показать, что $\Gamma = \varphi \circ \gamma$ — кусочно-гладкий путь и что для любой непрерывной функции $f(w)$ имеет место равенство

$$\int_{\Gamma} f(w)\,dw = \int_{\gamma} f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz.$$

Остается ли эта формула верной в случае, когда γ не обязательно гладкий путь?

4. Пусть γ — гладкий путь: $t \to \gamma(t) = re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, а γ_n — путь $t \to \gamma_n(t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) re^{it}$, где t меняется в том же интервале. Показать, что если функция $f(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leqslant r$, то

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

5. Показать, что если функция $f(z)$, *непрерывная* в замкнутом круге $|z| \leqslant r$, голоморфна в открытом круге $|z| < r$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \quad \text{для любого} \quad |z| < r,$$

(окружность $|t| = r$ обходится в положительном направлении).

6. Найти путь $t \to \gamma(t)$, где t меняется от 0 до 2π, имеющий в качестве образа эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в плоскости $\mathbf{R}^2$ $(a, b > 0)$. Вычислить двумя различными способами интеграл $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ и вывести равенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

7. Пусть $P_n(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ — полином степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами, и пусть γ_R — образ окружности $|t| = R$ при отображении $t \to z = P_n(t)$.

Показать, что если R достаточно велико, то путь γ_R не проходит через точку $z=0$, и что $I(\gamma_R, 0)=n$; вывести из этого, что уравнение $P_n(t)=0$ имеет по крайней мере один корень. (Показать сначала, что для достаточно большого R имеем $|t^n| > |a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0|$ при $|t| \geqslant R$. Использовать затем предложение 8.3 из § 1, чтобы показать, что число $I(\gamma_R, 0)$ равно индексу образа окружности $|t|=R$ относительно начала координат при отображении $t \to t^n$.)

8. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — голоморфная функция в области D. Если в области D

$$au(x, y) + bv(x, y) = c,$$

где a, b и c — действительные постоянные, не все равные нулю, то функция $f(z)$ постоянна в D.

9. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в выпуклой области D. Показать, что для любой пары точек $a, b \in D$ можно найти две точки c и d на отрезке, соединяющем a и b, такие, что

$$f(a) - f(b) = (a-b)\,[\operatorname{Re}(f'(c)) + i \operatorname{Im}(f'(d))].$$

(Рассмотреть функцию действительного переменного t, определенную равенством

$$F(t) = f(b + (a-b)\,t)/(a-b),$$

и применить теорему о конечном приращении к действительной и мнимой части $F(t)$.)

10. Пусть D — (связная) область, симметричная относительно действительной оси и имеющая с ней непустое пересечение I. Каждую функцию $f(z)$, голоморфную в области D, можно представить (и притом единственным образом) в виде

$$f(z) = g(z) + ih(z) \quad \text{для любого } z \in D,$$

где g и h — функции, голоморфные в области D и принимающие на I *действительные* значения.

Показать, что тогда

$$\overline{g(\bar{z})} = g(z), \quad \overline{h(\bar{z})} = h(z)$$

и

$$\overline{f(\bar{z})} = g(z) - ih(z) \quad \text{для любого } z \in D.$$

11. Пусть f и g — голоморфные функции в области D, не обращающиеся в этой области в нуль. Существует последовательность (a_n) точек области D, такая, что

$$\lim a_n = a, \quad a \in D, \quad a_n \neq a \quad \text{для любого } n$$

и для любого n

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)} .$$

Показать, что тогда существует постоянная c, такая, что $f(z) = cg(z)$ в области D.

12. Пусть $\varphi(z)$ — *непрерывная* функция на ориентированной границе Γ компакта K. Пусть область D — дополнение к границе Γ в $\mathbf{C}$. Положим, для $z \in D$,

$$f(z) = \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

(1) Положим $\varrho = \inf_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - a|$ для $a \in D$. Показать, что функцию $1/(\zeta - z)$ для $\zeta \in \Gamma$ и $|z - a| \leqslant r$, где $0 < r < \varrho$, можно разложить в нормально сходящийся ряд по степеням $(z - a)$. Вывести отсюда, что функция $f(z)$ аналитична в окрестности каждой точки $a \in D$ (ср. доказательство теоремы 3, § 2).

(2) Показать, что для любого целого $n \geqslant 1$ справедливо равенство

$$f^{(n)}(a) = n! \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad a \in D$$

(ср. гл. III, § 1).

13. Пусть $f(z)$ — голоморфная функция при $|z| < \varrho$. Показать, что если $0 < r < \varrho$, то

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ |h| < \varrho - r}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

равномерно при $|z| \leqslant r$. (Записать, используя 12,

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) = \frac{h}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r'} \frac{f(t)\,dt}{(t-z-h)(t-z)^2},$$

где $r' = (\varrho + r)/2$, $|h| < (r' - r)/2 = (\varrho - r)/4$, например, и вывести отсюда, полагая $M = \sup\limits_{|t|=r'} |f(t)|$, неравенство

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)\right| \leqslant 4M \frac{\varrho+r}{(\varrho-r)^3} |h|.)$$

Глава III

РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА. ОСОБЫЕ ТОЧКИ И ВЫЧЕТЫ

§ 1. НЕРАВЕНСТВО КОШИ; ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

1. Интегральное выражение коэффициентов Тейлора. Нам уже известно (гл. II, § 2, п. 6, теорема 3), что если функция $f(z)$ голоморфна в открытом круге D с центром в начале координат, то $f(z)$ есть сумма степенного ряда $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, сходящегося в D.

Коэффициенты a_n этого степенного ряда могут быть найдены по формуле

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Иначе говоря, числа a_n являются коэффициентами разложения Тейлора функции $f(z)$ в начале координат. Мы постараемся выразить их через интегралы, содержащие функцию $f(z)$.

Пусть $z = re^{i\theta}$, причем $0 \leqslant r < \varrho$, где ϱ — радиус круга D. Тогда

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n e^{in\theta}. \tag{1.1}$$

При постоянном r функция $f(re^{i\theta})$ представляет собой периодическую функцию переменного θ, и равенство (1.1) дает разложение этой функции в ряд Фурье. Заметим, что в него входят только члены, содержащие $e^{in\theta}$ с целыми $n \geqslant 0$. Известно, что коэффициенты ряда Фурье непрерывной функции периода 2π выражаются через интегралы, содержащие эту функцию. В нашем случае ряд (1.1) нормально сходится относительно переменного θ при фиксированном r. Поэтому можно интегрировать этот ряд почленно, что дает соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta = \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}\, d\theta.$$

В правой части этого равенства стоит сумма, все слагаемые которой равны нулю, за исключением одного, соответствующего случаю $p = n$. Таким образом, мы получаем основную формулу

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\,d\theta, \tag{1.2}$$

которую, впрочем, можно было также получить из соотношения (6.1) § 2 гл. II.

Это интегральное выражение позволяет получить оценку для коэффициентов a_n. Пусть $M(r)$ — верхняя грань функции $|f(re^{i\theta})|$ переменного θ, т. е. верхняя грань модуля функции f на окружности радиуса r с центром в начале координат. Абсолютная величина правой части равенства (1.2) не превосходит $M(r)$; отсюда мы получаем для любого целого $n \geqslant 0$ следующее важное неравенство:

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}. \tag{1.3}$$

Оно называется неравенством Коши.

2. Теорема Лиувилля.

Теорема. *Всякая функция $f(z)$, ограниченная и голоморфная во всей плоскости, постоянна.*

Доказательство. Применим неравенство (1.3). Согласно предположению теоремы, величина $M(r)$ ограничена сверху числом M, не зависящим от r. Поэтому

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}$$

для сколь угодно большого r. Если $n \geqslant 1$, то с увеличением r правая часть последнего неравенства делается сколь угодно малой. Поэтому $a_n = 0$ при $n \geqslant 1$; таким образом, $f(z) = a_0$, т. е. f — постоянная функция.

Приложение: теорема Даламбера. Мы сейчас докажем, что всякий полином с комплексными коэффициентами, не являющийся постоянной, имеет хотя бы один комплексный корень. Доказательство проводится от противного.

Пусть $P(z)$ — такой полином, что для любого z число $P(z)$ отлично от нуля. Тогда функция $1/P(z)$ голоморфна во всей плоскости. Она ограничена; в самом деле,

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0=$$
$$=z^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}\right); \quad a_n\neq 0.$$

Поэтому $|P(z)|$ стремится к бесконечности при $|z|$, стремящемся к бесконечности. Следовательно, на комплексной плоскости существует круг, вне которого величина $|1/P(z)|$ ограничена. Но она ограничена и внутри этого круга как непрерывная функция. Следовательно, функция $\frac{1}{P(z)}$ ограничена и голоморфна во всей плоскости и, согласно теореме Лиувилля, постоянна. Но тогда постоянна и функция $P(z)$, что противоречит сделанному предположению.

§ 2. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

1. Теорема о среднем. Применяя соотношение (1.2) § 1 к случаю $n=0$, получаем, что

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,d\theta,$$

или, иначе говоря,

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,d\theta. \tag{1.2}$$

Это соотношение показывает, что значение функции f в точке 0 равно среднему значений функции f на окружности радиуса r с центром в точке 0. Отсюда следует более общее утверждение: если функция f голоморфна в области D и S — круг, содержащийся в этой области, то значение функции f в центре этого круга равно среднему значений этой функции на окружности — границе круга.

Говорят, что для функции f, принимающей действительные или комплексные значения, определенной и непрерывной в области D, справедлива *теорема о среднем*, если для каждого замкнутого круга S, содержащегося в области

D, значение функции f в центре S равно среднему значений функции на его границе. Мы увидим несколько позже, что функции, для которых справедлива теорема о среднем, есть не что иное, как *гармонические* функции.

Мы знаем теперь, что *для голоморфных функций теорема о среднем справедлива.* Ясно, что если для функции с комплексными значениями справедлива теорема о среднем, то она справедлива также для ее действительной и мнимой частей. Поэтому теорема о среднем справедлива для действительной и мнимой части голоморфной функции.

2. Принцип максимума. Этот принцип будет доказан нами для всех функций (принимающих действительные или комплексные значения), для которых справедлива теорема о среднем (т. е., как мы увидим позднее, для гармонических функций).

Теорема 1 (принцип максимума). *Пусть f — комплекснозначная функция, непрерывная в области D плоскости* **C**. *Если для функции f справедлива теорема о среднем и если величина $|f|$ имеет относительный максимум в точке $a \in D$* (т. е. если $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ *для* всех z, достаточно близких к a), *то функция f постоянна в окрестности точки a.*

Доказательство. Если $f(a) = 0$, то утверждение очевидно. Предположим, что $f(a) \neq 0$. Умножив в случае надобности функцию f на подходящее комплексное число, мы можем добиться того, чтобы $f(a)$ было действительным положительным числом.

Для достаточно малого $r \geqslant 0$ положим

$$M(r) = \sup_{\theta} |f(a + re^{i\theta})|.$$

По предположению, если $r \geqslant 0$ достаточно мало, то $M(r) \leqslant \leqslant f(a)$. Далее, в силу теоремы о среднем,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta, \tag{2.1}$$

откуда $f(a) \leqslant M(r)$. Следовательно, $f(a) = M(r)$. Отсюда вытекает, что функция

$$g(z) = \operatorname{Re}(f(a) - f(z))$$

неотрицательна, если $|z - a| = r$ достаточно мало, причем $g(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(z) = f(a)$. В силу (2.1), среднее значение функции $g(z)$ на окружности

$$|z - a| = r$$

равно нулю. Поскольку функция g непрерывна и неотрицательна, она тождественно равна нулю на окружности, и $f(z) = f(a)$, если $|z - a| = r$ достаточно мало. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть D — ограниченная область плоскости* $\mathbf{C}$; *f — комплекснозначная функция, определенная и непрерывная в замыкании $\bar{D}$, для которой в области D справедлива теорема о среднем, M — верхняя грань модуля $|f(z)|$ на границе области D. Тогда*

(1) $|f(z)| \leqslant M$ *для всех* $z \in D$;

(2) *если* $|f(a)| = M$ *для какой-нибудь точки* $a \in D$, *то функция f постоянна.*

Доказательство. Пусть M' — верхняя грань модуля $|f(z)|$ на множестве $\bar{D}$, которая достигается по крайней мере в одной точке a компакта $\bar{D}$ (так как функция $|f(z)|$ непрерывна). Если $a \in D$, то, согласно теореме 1, функция f постоянна в окрестности точки a. Из теоремы 1 вытекает также, что множество тех точек области D, в которых функция f принимает значение $f(a)$, открыто; очевидно также, что оно замкнуто в D и непусто. Следовательно, оно совпадает с D (напомним, что D связно). Поскольку функция f непрерывна, она постоянна в $\bar{D}$. Таким образом, $f(z) = f(a)$ для всех точек $z \in \bar{D}$, и $M' = M$. Утверждения (1) и (2) доказаны.

Осталось рассмотреть тот случай, когда равенство $|f(a)| = M'$ не выполнено ни в одной точке $a \in D$. Но тогда $M = M'$, а утверждение (2) тривиально, поскольку равенство $|f(a)| = M$ не выполнено ни в одной точке a области D.

З а м е ч а н и е. Применим принцип максимума к следующему случаю. Пусть функция f непрерывна в замкнутом круге и голоморфна внутри него. Тогда верхняя грань модуля функции на границе круга не меньше любого значения $|f|$ внутри круга. В частности, число $M(r)$ в неравенстве Коши (1.3) § 1 есть верхняя грань модуля $|f(z)|$ не только при $|z| = r$, но и при $|z| \leqslant r$.

§ 3. ЛЕММА ШВАРЦА

Т е о р е м а (л е м м а Ш в а р ц а). *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$. Предположим, что*

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| < 1 \ \textit{при} \ |z| < 1.$$

Тогда:

1) *при* $|z| < 1$ *имеет место неравенство* $|f(z)| \leqslant |z$

2) *если* $|f(z_0)| = |z_0|$ *для некоторого* $z_0 \neq 0$, m;

$$f(z) = \lambda z, \quad \textit{где} \ |\lambda| = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f(0) = 0$, коэффициент a_0 ряда Тейлора $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ равен нулю. Отсюда следует, что функция $\frac{f(z)}{z}$ голоморфна при $|z| < 1$. Так как по предположению $|f(z)| < 1$, то

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r} \quad \text{при } |z| = r.$$

В силу принципа максимума, это неравенство справедливо также при $|z| \leqslant r$. Для фиксированного z в круге $|z| < 1$ неравенство $|f(z)| < \frac{|z|}{r}$ выполнено всякий раз, когда $r \geqslant |z|$ и $r < 1$. Как предельный случай, получаем неравенство $|f(z)| \leqslant |z|$. Мы доказали утверждение 1.

Если для некоторого $z_0 \neq 0$ имеет место равенство $|f(z_0)| = |z_0|$, то это означает, что модуль голоморфной функции $f(z)/z$ достигает своего максимума во внутренней точке круга $|z| < 1$. Следовательно, эта функция постоянна, т. е. $f(z)/z = \lambda$, где $|\lambda| = 1$. Теорема доказана.

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ЛОРАНА

1. Ряды Лорана. Мы будем рассматривать формальные ряды $\sum_n a_n X^n$, где суммирование (формальное) распространено на все целые числа: положительные, отрицательные и нуль. Такому ряду сопоставляются два формальных степенных ряда (в обычном смысле): $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ и $\sum_{n<0} a_n X^{-n}$. Пусть ϱ_1 и $1/\varrho_2$ — радиусы сходимости этих рядов. Рассмотрим сходящиеся ряды

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \text{при} \quad |z| < \varrho_1, \tag{1.1}$$

$$f_2(z) = \sum_{n<0} a_n z^n \quad \text{при} \quad |z| > \varrho_2. \tag{1.2}$$

Покажем, что $f_2(z)$ — *голоморфная* функция переменного z. Положим $z = \frac{1}{u}$; функция

$$g(u) = \sum_{n>0} a_{-n} u^n$$

голоморфна при $|u| < 1/\varrho_2$ и ее производная задается равенством

$$g'(u) = \sum_{n>0} n a_{-n} u^{n-1}.$$

Из теоремы о дифференцировании сложной функции вытекает, что функция $f_2(z)$ дифференцируема и

$$f_2'(z) = -\frac{1}{z^2} g'(1/z) = \sum_{n<0} n a_n z^{n-1}.$$

Таким образом, ряд (1.2) можно дифференцировать почленно при $|z| > \varrho_2$. Предположим теперь, что $\varrho_2 < \varrho_1$. Тогда сумма $f(z)$ ряда

$$\sum_{-\infty<n<+\infty} a_n z^n \tag{1.3}$$

голоморфна в круговом кольце $\varrho_2 < |z| \leqslant \varrho_1$ и ее производная $f'(z)$ есть сумма ряда $\sum n a_n z^{n-1}$, полученного из ряда (1.3) почленным дифференцированием. Ряд $\sum a_n z^n$ называется *рядом Лорана* в кольце $\varrho_2 < |z| < \varrho_1$. Не исключаются также и случаи $\varrho_2 = 0$ и $\varrho_1 = +\infty$. Сходимость ряда (1.3) нормальна в любом кольце $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_1$, где r_1 и r_2 — такие числа, что

$$\varrho_2 < r_2 < r_1 < \varrho_1.$$

2. Разложение в ряд Лорана функции, голоморфной в кольце.

Определение. Говорят, что функция $f(z)$, определенная в кольце

$$\varrho_2 < |z| < \varrho_1,$$

разлагается в этом кольце в ряд Лорана, если существует ряд Лорана $\sum\limits_n a_n z^n$, который сходится в этом кольце и сумма которого равна $f(z)$ в любой точке кольца.

Как было доказано в п. 1, в этом случае функция $f(z)$ голоморфна в кольце, и ряд нормально сходится в любом замкнутом кольце $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_1$, таком, что

$$\varrho_2 < r_2 < r_1 < \varrho_1.$$

Покажем теперь, что если функция разлагается в ряд Лорана, то этот ряд определяется единственным образом.

В самом деле, положим $z = re^{i\theta}$ $(\varrho_2 < r < \varrho_1)$ и проинтегрируем почленно по θ равномерно сходящийся ряд

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty<n<+\infty} a_n r^n e^{in\theta}.$$

Точно так же, как в § 1 (п. 1), получаем интегральную формулу:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta, \tag{2.1}$$

где n — целое число, положительное, отрицательное или нуль.

Мы видим, что если функция f задана, то коэффициенты a_n ряда Лорана этой функции (если такой ряд существует), однозначно определяются формулой (2.1).

Теорема. *Любая функция $f(z)$, голоморфная в кольце $\varrho_2 < |z| < \varrho_1$, разлагается в этом кольце в ряд Лорана.*

Доказательство. Пусть r_1 и r_2 — два числа, такие, что

$$\varrho_2 < r_2 < r_1 < \varrho_1.$$

Покажем, что существует ряд Лорана, нормально сходящийся в кольце $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_1$, сумма которого равна в этом кольце $f(z)$. В силу единственности ряда Лорана, вытекающей из интегральной формулы (2.1), ряд Лорана, обладающий таким свойством, не зависит от выбора r_1 и r_2. Поэтому этот ряд сходится к $f(z)$ во всем кольце $\varrho_2 < |z| < \varrho_1$, что доказывает теорему.

Пусть числа r_1 и r_2 фиксированы; выберем два числа, r_1' и r_2', такие, что $\varrho_2 < r_2' < r_2 < r_1 < r_1' < \varrho_1$. Рассмотрим компактное кольцо

$$r_2' \leqslant |z| \leqslant r_1'.$$

Ориентированная граница этого кольца есть разность окружности γ_1 радиуса r_1' с центром в точке 0, пробегаемой в положительном направлении, и окружности γ_2 радиуса r_2' с центром в точке 0, пробегаемой в положительном направлении. Согласно интегральной формуле Коши (гл. II, § 2, теорема 5), при $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_1$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)\,dt}{t-z}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим первый из этих интегралов; так как $|t| = r_1'$ и $|z| \leqslant r_1 < r_1'$, имеет место равенство

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{t^{n+1}},$$

причем ряд, стоящий в правой части этого равенства, нормально сходится, если точка t описывает окружность радиуса r_1' с центром в точке 0. Подставим этот ряд в первый интеграл равенства (2.2) вместо $\frac{1}{t-z}$. Нормально сходящийся ряд можно интегрировать почленно, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n, \tag{2.3}$$

где

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}}\qquad (n\geqslant 0). \tag{2.4}$$

Теперь рассмотрим второй интеграл. Поскольку $|t|=r_2'$ и $|z|\geqslant r_2>r_2'$, имеем

$$\frac{1}{t-z}=-\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-t/z}=-\sum_{n<0}\frac{z^n}{t^{n+1}}.$$

Заменим во втором интеграле $\frac{1}{t-z}$ этим рядом. Так как он сходится нормально, возможно почленное интегрирование, откуда

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)\,dt}{t-z}=\sum_{n<0}a_n z^n, \tag{2.5}$$

где

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}}\qquad (n<0). \tag{2.6}$$

Наконец, из равенства (2.2) следует, что

$$f(z)=\sum_{-\infty<n<+\infty}a_n z^n \quad \text{при} \quad r_2\leqslant|z|\leqslant r_1,$$

и ряд сходится нормально. Теорема доказана.

3. Разбиение функции, голоморфной в кольце.

Предложение 3.1. *Если функция $f(z)$ голоморфна в кольце $\varrho_2<|z|<\varrho_1$, то существуют функция $f_1(z)$, голоморфная в круге $|z|<\varrho_1$, и функция $f_2(z)$, голоморфная при $|z|>\varrho_2$, такие, что*

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z). \tag{3.1}$$

Это разбиение единственно, если предположить, что функция f_2 стремится к нулю при $|z|$, стремящемся к бесконечности.

В самом деле, пусть $f(z)=\sum\limits_{-\infty<n<+\infty} a_n z^n$ есть разложение функции f в ряд Лорана в кольце $\varrho_2<|z|<\varrho_1$. Положим

$$f_1(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n, \qquad f_2(z)=\sum_{n<0} a_n z^n. \tag{3.2}$$

Соотношение (3.1), очевидно, выполняется, и $|f_2(z)|$ стремится к нулю при $|z|$, стремящемся к бесконечности.

Предположим, что существует другое такое разбиение

$$f(z)=g_1(z)+g_2(z),$$

и покажем, что $f_1=g_1$, $f_2=g_2$. Пусть h — голоморфная функция, равная f_1-g_1 при $|z|<\varrho_1$ и g_2-f_2 при $|z|>\varrho_2$; функция h голоморфна во всей плоскости и стремится к нулю при $|z|$, стремящемся к ∞. В силу принципа максимума (§ 2, п. 2), функция h тождественно равна нулю. Предложение доказано.

4. Неравенство Коши; приложения к изучению изолированных особых точек. Рассмотрим интегральную формулу (2.1). Если $M(r)$ — верхняя грань модуля $|f(z)|$ при $|z|=r$, то абсолютная величина правой части равенства (2.1) не превосходит $M(r)$. Отсюда получаем следующее неравенство Коши:

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}; \tag{4.1}$$

здесь n — целое число, положительное, отрицательное или нуль.

Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную в круге с выколотым центром: $0<|z|<\varrho$.

Спрашивается, можно ли эту функцию продолжить до функции, голоморфной во всем круге $|z|<\varrho$ (включая центр)? Ясно, что если такое продолжение существует, то оно единственно (это вытекает из принципа аналитического продолжения, или, еще проще, из соображений непрерывности).

Предложение 4.1. *Для того чтобы такое продолжение было возможно, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ была ограничена в окрестности нуля.*

Необходимость этого условия очевидна. Докажем его достаточность. В круге с выколотым центром $0 < |z| < \varrho$ функция f разлагается в ряд Лорана $\sum\limits_{-\infty<n<+\infty} a_n z^n$. По предположению существует число $M > 0$, которое мажорирует $|f(z)|$ для достаточно малого $|z| = r$. В силу неравенства Коши (4.1), имеем

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}.$$

Поскольку в этом неравенстве r может быть сколь угодно малым, при $n < 0$ получаем $a_n = 0$. Следовательно, ряд Лорана функции $f(z)$ сводится к ряду Тейлора, сумма которого есть искомое продолжение функции $f(z)$.

Определение. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в круге с выколотым центром $0 < |z| < \varrho$. Говорят, что начало координат 0 является *изолированной особой точкой* функции f, если функция f не может быть продолжена до функции, голоморфной во всем круге $|z| < \varrho$.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка 0 была изолированной особой точкой функции f, состоит в том, что не все коэффициенты a_n ряда Лорана функции f при $n < 0$ равняются нулю. Очевидно, возможны два случая.

I случай. Имеется лишь конечное множество отрицательных индексов, для которых a_n отлично от нуля. Тогда существует положительное число n, такое, что функция $z^n f(z) = g(z)$ может быть продолжена до функции, голоморфной в начале координат. Следовательно, функция $f(z) = \frac{g(z)}{z^n}$ *мероморфна* в начале координат.

II случай. Имеется бесконечное множество отрицательных индексов n, таких, что $a_n \neq 0$. В этом случае функция $f(z)$ не может быть продолжена до функции, мероморфной в окрестности начала координат.

Определение. В первом случае говорят, что точка 0 есть *полюс* функции f; во втором — что точка 0 есть *существенно особая точка* функции f.

Теорема (Вейерштрасс[1]). *Если 0 — изолированная существенно особая точка функции $f(z)$, голоморфной в круге с выколотым центром $0<|z|<\varrho$, то для любого $\varepsilon>0$ множество значений функции $f(z)$ при $0<|z|<\varepsilon$ всюду плотно в плоскости* $\mathbf{C}$.

Доказательство. Будем рассуждать от противного и предположим, что существует круг радиуса $r>0$ с центром в точке $a\in\mathbf{C}$, который находится *вне* области значений функции f при $0<|z|<\varepsilon$. Следовательно,

$$|f(z)-a|\geqslant r \quad \text{при} \quad 0<|z|<\varepsilon. \tag{4.2}$$

Функция $g(z)=\frac{1}{f(z)-a}$, таким образом, голоморфна и ограничена в круге с выколотым центром $0<|z|<\varepsilon$. Согласно предложению 4.1, она может быть продолжена до функции, голоморфной в круге $|z|<\varepsilon$, которую мы также обозначим $g(z)$. Тогда функция $f(z)=a+\frac{1}{g(z)}$ мероморфна в круге $|z|<\varepsilon$, а это противоречит предположению о том, что точка 0 — существенно особая точка для $f(z)$.

Замечание. Случай существенно особой точки z_0 сводится к случаю $z_0=0$ с помощью замены z на $z-z_0$.

Теперь мы приведем без доказательства следующую теорему, гораздо более точную, чем теорема Вейерштрасса.

Теорема Пикара. *Если точка 0 — изолированная существенно особая точка голоморфной функции $f(z)$, то множеством значений f при $0<|z|<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$ является вся плоскость $\mathbf{C}$, за исключением, быть может, одной точки.*

Пример. Функция $e^{1/z}=\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$ голоморфна во всей плоскости, за исключением точки $z=0$, которая является существенно особой точкой этой функции, так как коэффициенты при $\frac{1}{z^n}$ отличны от нуля для всех $n\geqslant 0$. Эта функция не принимает значения 0; читателю предлагается доказать, что эта функция принимает любое отличное от нуля значение при $0<|z|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — любое число.

[1]) До Вейерштрасса теорему доказал Ю. В. Сохоцкий.— *Прим. ред.*

§ 5. ВВЕДЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ТОЧКИ. ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ

1. Сфера Римана. В пространстве $\mathbf{R}^3$ координат x, y, u рассмотрим единичную сферу S_2:

$$x^2+y^2+u^2=1.$$

Сфера S_2 в топологии, индуцированной топологией пространства $\mathbf{R}^3$, компактна как замкнутое и ограниченное подмножество $\mathbf{R}^3$. Через P и P' мы обозначим точки S_2 с координатами соответственно $(0, 0, 1)$ и $(0, 0, -1)$. Рассмотрим стереографическую проекцию с полюсом в точке P. Она сопоставляет каждой точке M сферы S_2, отличной от P, точку плоскости $u=0$, находящуюся на прямой, соединяющей P с M. Комплексный аффикс этой точки находится по формуле

$$z=\frac{x+iy}{1-u}, \tag{1.1}$$

где x, y, u — координаты точки M.

Теперь рассмотрим стереографическую проекцию с полюсом в точке P' и сопоставим точке M сферы S_2 с координатами (x, y, u) точку плоскости $u=0$, комплексно сопряженную образу точки M при этой стереографической проекции. Для ее комплексного аффикса z' имеет место равенство

$$z'=\frac{x-iy}{1+u}. \tag{1.2}$$

Таким образом, каждой точке M сферы S_2, отличной от точек P и P', сопоставлено два комплексных числа z и z', причем выполняется соотношение

$$zz'=1. \tag{1.3}$$

Отображение $(x, y, u)\to z$ представляет собой гомеоморфизм пространства $S_2\setminus P$ на комплексную плоскость $\mathbf{C}$; оно называется *комплексной картой* области $S_2\setminus P$ на плоскости $\mathbf{C}$. Аналогично, отображение $(x, y, u)\to z'$ представляет собой комплексную карту области $S_2\setminus P'$. Сфера S_2, снабженная этими двумя картами, называется сферой Римана.

Пусть D — открытое множество на сфере S_2. Говорят, что функция f, определенная в D, *голоморфна* в D, если в окрестности каждой точки $M \in D$, отличной от P, она представима как голоморфная функция переменного z, а в окрестности каждой точки, отличной от P', как голоморфная функция переменного z'. Заметим, что в окрестности каждой точки сферы S_2, отличной как от P, так и от P', каждая функция, голоморфная по z, голоморфна и по z' и, наоборот, в силу соотношения (1.3). Мы всегда будем отождествлять комплексную плоскость $\mathbf{C}$ и сферу S_2 с выколотой точкой P в соответствии с соотношением (1.1).

Таким образом, сфера S_2 получается из комплексной плоскости прибавлением одной «бесконечной точки». Для изучения функции в окрестности точки P вводится комплексное переменное $z' = 1/z$, которое обращается в нуль в точке P. В комплексной плоскости $\mathbf{C}$ открытые множества $|z| > r$ составляют фундаментальную систему окрестностей бесконечной точки. Функция $f(z)$, определенная в таком открытом множестве, *голоморфна в бесконечной точке*, если в результате замены переменной $z = 1/z'$ мы получаем функцию, голоморфную в окрестности начала координат.

Аналогично функция $f(z)$ называется *мероморфной в бесконечности*, если после замены $z = 1/z'$ она становится функцией, мероморфной в окрестности начала координат.

Наконец, бесконечная точка является существенно особой точкой для функции $f(z)$, голоморфной при $|z| > r$, если точка 0 является существенно особой точкой для функции $f(1/z')$.

Пусть

$$f(z) = \sum_n a_n z^n$$

— разложение функции f в ряд Лорана в области $|z| > r$. Для того чтобы бесконечная точка была полюсом функции f, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_n равнялись нулю для всех индексов $n \geqslant 0$, за исключением конечного числа. Для того чтобы бесконечная точка была существенно особой точкой функции f, необходимо и достаточно, чтобы существовало бесконечное множество индексов $n \geqslant 0$, таких, что $a_n \neq 0$.

На сфере S_2 естественным образом вводятся понятия *дифференцируемого пути, замкнутого пути и ориентированной границы компакта*.

2. Теорема о вычетах. Рассмотрим сначала функцию $f(z)$, голоморфную в кольце $\varrho_2 < |z| < \varrho_1$ с центром в начале координат.

Предложение 2.1. *Если γ — замкнутый путь, содержащийся в этом кольце, то имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = I(\gamma, 0)\,a_{-1}, \tag{2.1}$$

где $I(\gamma, 0)$ — индекс пути γ относительно точки 0 и a_{-1} — коэффициент при $1/z$ в ряде Лорана функции f.

Доказательство. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы $a_{-1}/z + g(z)$, где $g(z) = \sum\limits_{n\neq -1} a_n z^n$ — функция, голоморфная в рассматриваемом кольце и имеющая примитивную, равную $\sum\limits_{n\neq -1} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ (ср. § 4, п. 1). Тогда

$$\int_\gamma f(z)\,dz = a_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_\gamma g(z)\,dz. \tag{2.2}$$

Однако $\int\limits_\gamma g(z)\,dz = 0$, так как функция g имеет примитивную, и $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i\, I(\gamma, 0)$ по определению индекса обхода. Эти два равенства вместе с (2.2) доказывают соотношение (2.1).

Формула (2.1) применяется при исследовании функций, для которых начало координат является особой точкой (полюсом или существенно особой точкой). В этом случае под γ понимается замкнутый путь в окрестности точки 0, не проходящий через эту точку. Коэффициент a_{-1} ряда Лорана функции f называется *вычетом* функции f в особой точке 0. В частности, если γ — окружность малого радиуса с центром в начале координат, пробегаемая в положительном направлении, то

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}. \tag{2.3}$$

Таким же образом определяется вычет изолированной особой точки, расположенной в любой конечной точке комплексной плоскости **C**.

Для определения *вычета в бесконечной точке* необходимо потребовать, чтобы функция $f(z)$ была голоморфна при $|z| > r$. Положим $z = 1/z'$; тогда

$$f(z)\,dz = -\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right) dz'. \tag{2.4}$$

По определению, вычет функции f в бесконечной точке равен вычету функции $-\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right)$ в точке $z' = 0$. Следовательно, если $\sum\limits_n a_n z^n$ — разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечной точки, то вычет функции f в этой точке равен $-a_{-1}$.

Теорема о вычетах. *Пусть D — открытое множество сферы Римана $\mathbf{S}_2$ и f — функция, голоморфная в D, за исключением, быть может, изолированных точек, которые являются особыми точками функции f. Пусть Γ — ориентированная граница компакта A, содержащегося в D, причем предполагается, что Γ не проходит ни через одну особую точку функции f. Тогда число особых точек, содержащихся в A, конечно, и имеет место следующее равенство:*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k). \tag{2.5}$$

Здесь через $\operatorname{Res}(f, z_k)$ *обозначен вычет функции f в точке z_k; суммирование производится по всем особым точкам функции f, находящимся внутри компакта A (включая, если нужно, и бесконечную точку).*

Доказательство. Будем различать два случая в зависимости от того, принадлежит ли A бесконечная точка или нет.

I случай: бесконечная точка не принадлежит компакту A; тогда A есть компакт на комплексной плоскости **C** (см. рис. 4); каждая особая точка z_k является центром замкнутого круга δ_k, целиком находящегося внутри A, причем радиусы этих кругов могут быть выбраны настолько малыми, чтобы они попарно не пересекались.

Пусть γ_k — границы кругов δ_k, пробегаемые в положительном направлении. Исключим из компакта A внутренность всех этих кругов; получим новый компакт, который обозначим A'. Ориентированная граница A' есть разность

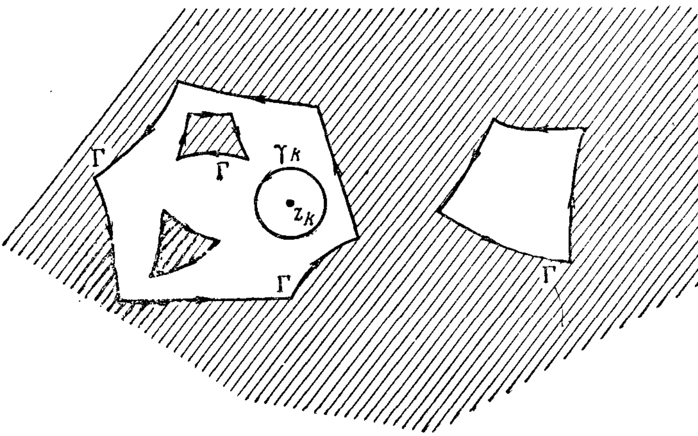


Рис. 4. Заштрихованная часть представляет собой дополнение к компакту A.

ориентированной границы Γ компакта A и окружностей γ_k. Так как функция f голоморфна внутри A', то (см. гл. II, § 2, п. 8, теорема 5)

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_k \int_{\gamma_k} f(z)\,dz. \tag{2.6}$$

С другой стороны, в силу (2.3),

$$\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Подставив это равенство в (2.6), мы получаем соотношение (2.5). Теорема доказана.

II случай: бесконечная точка принадлежит A. Пусть $|z| \geqslant r$ — окрестность бесконечной точки, в которой функция $f(z)$ голоморфна (возможно, за исключением самой этой точки), причем граница этой окрестности не пересекается с Γ.

Пусть A'' — компакт, полученный из A исключением области $|z| > r$ (см. рис. 5). Ориентированная граница компакта A'' есть сумма ориентированной границы Γ

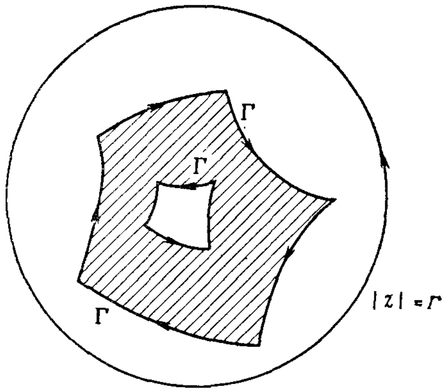


Рис. 5. Заштрихованная часть представляет собой дополнение к A.

компакта A и окружности $|z| = r$, пробегаемой в положительном направлении. Поскольку компакт A'' не содержит бесконечной точки, для него теорема о вычетах уже доказана. Согласно этой теореме, имеем

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{|z|=r} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k). \qquad (2.7)$$

Сумма, стоящая в правой части, распространена на все особые точки z_k функции f, содержащиеся в компакте A, *кроме бесконечной точки*. С другой стороны, по определению вычета в бесконечной точке имеем

$$\int_{|z|=r} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty);$$

подставляя это равенство в (2.7), получаем

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, \infty) + \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k) \right).$$

Но это равенство есть не что иное, как соотношение (2.5), так как бесконечность есть одна из точек z_k.

Замечание. Рассмотрим, в частности, случай, когда рассматриваемый компакт есть вся сфера S_2. Так как граница этого компакта — пустое множество, соотношение (2.5) переходит в равенство

$$\sum_k \operatorname{Res}(f, z_k) = 0. \tag{2.8}$$

Например, *сумма всех вычетов рациональной дроби (включая вычет в бесконечности) равна нулю.*

3. Практическое вычисление вычетов.

Случай простого полюса. Пусть z_0 — простой полюс функции f, тогда

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} g(z),$$

где g — функция, голоморфная в окрестности точки z_0, $g(z_0) \neq 0$. Пусть

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n$$

— разложение Тейлора функции $g(z)$ в окрестности z_0. Мы видим, что в ряде Лорана функции $f(z)$ коэффициент при $\frac{1}{z - z_0}$ равен $g(z_0)$. Следовательно,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} (z - z_0) f(z). \tag{3.1}$$

Если функция $f(z)$ задана в виде частного P/Q, где P и Q — функции, голоморфные в окрестности точки z_0, причем z_0 есть простой нуль функции Q, а $P(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}, \tag{3.2}$$

где Q' — производная Q.

Пример. Пусть $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$; у этой функции два простых полюса $z = \pm i$; поскольку $P/Q' = \frac{1}{2z} e^{iz}$, вычеты функции $f(z)$ в этих точках равны соответственно $-\frac{i}{2e}$ и $\frac{ie}{2}$.

Случай кратного полюса. Пусть $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} g(z)$, где $g(z)$ — функция, голоморфная и отличная от нуля в точке z_0. Вычет функции $f(z)$ равен коэффициенту при $(z-z_0)^{k-1}$ ряда Тейлора функции $g(z)$ в точке z_0. Таким образом, задача сводится к вычислению коэффициента ряда Тейлора функции $g(z)$. Для этого часто бывает удобно принять $t = z - z_0$ за новое переменное.

Пример. Пусть $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$. Найдем вычет этой функции в двойном полюсе $z = i$. В данном случае

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}.$$

Положим $z = i + t$ и найдем коэффициент при t в ряде Тейлора функции

$$h(t) = \frac{e^{i(i+t)}}{(i+t)(2i+t)^2}.$$

Достаточно выписать ряды Тейлора каждого из сомножителей, ограничившись членами 1 степени:

$$e^{i(i+t)} = e^{-1}(1 + it + \ldots),$$
$$(i+t)^{-1} = -i(1-it)^{-1} = -i(1 + it + \ldots),$$
$$(2i+t)^{-2} = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{i}{2}t\right)^{-2} = -\frac{1}{4}(1 + it + \ldots).$$

Отсюда

$$h(t) = \frac{i}{4e}(1 + 3it + \ldots),$$

и искомый вычет равен $-\frac{3}{4e}$.

Приложение: вычет логарифмической производной. Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в окрестности точки z_0. Требуется определить вычет логарифмической производной f'/f в точке z_0. Имеем

$$f(z) = (z-z_0)^k g(z),$$

где функция $g(z)$ голоморфна и отлична от нуля в точке z_0, а целое число k положительно или равно нулю, если функция $f(z)$ голоморфна в точке z_0, и отрицательно, если z_0 — полюс функции f. Вычисляем логарифмическую производную функции f:

$$f'/f = \frac{k}{z-z_0} + g'/g.$$

Следовательно, точка z_0 является *простым полюсом* функции f'/f, и *вычет этой функции в* z_0 *равен числу* k, т. е. кратности нуля или полюса z_0 (кратность считается положительной, если речь идет о нуле, и отрицательной, если речь идет о полюсе).

4. Определение числа полюсов и нулей мероморфной функции.

Предложение 4.1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в открытом множестве D, не являющаяся постоянной, а Γ — ориентированная граница компакта K, содержащегося в D. Предположим, что функция f не имеет на Γ полюсов и не принимает значения a. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a} = Z - P, \tag{4.1}$$

где Z представляет собой сумму кратностей корней уравнения

$$f(z) - a = 0,$$

содержащихся в K, и P — сумма кратностей полюсов функции f, содержащихся в K.

Это сразу следует из теоремы о вычетах и доказанного в конце п. 3 утверждения относительно вычетов логарифмической производной функции $f(z)-a$.

В частности, если функция f голоморфна, то интеграл в левой части равенства (4.1) равен числу нулей функции $f(z) - a$, содержащихся в K, причем каждый нуль учитывается столько раз, какова его кратность.

Отметим, что значение интеграла в левой части равенства (4.1) равно частному от деления на 2π *изменения аргумента* $f(z) - a$, когда z пробегает замкнутый путь Γ (ср. гл. II, § 1, п. 5).

Предложение 4.2. *Пусть z_0 — корень кратности k уравнения $f(z) = a$, где f — голоморфная функция в окрестности точки z_0, не являющаяся постоянной. Тогда в любой достаточно малой окрестности V точки z_0 и для любого числа b, достаточно близкого к a, уравнение $f(z) = b$ имеет точно k решений.*

В самом деле, пусть γ — окружность с центром z_0 настолько малого радиуса, что z_0 — единственное решение уравнения $f(z) = a$ в замкнутом круге, ограничиваемом γ. Предположим, кроме того, что радиус настолько мал, что $f'(z)$ отлична от нуля во всех точках этого круга, кроме точки z_0. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-b}\,. \tag{4.2}$$

Известно, что значение интеграла (4.2) остается постоянным, когда точка b пробегает связную компоненту дополнения к множеству значений функции f на окружности γ (ср. гл. II, § 1, п. 8). Следовательно, для любого b, достаточно близкого к a, имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-b}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a}=k.$$

Поэтому уравнение $f(z) = b$ имеет внутри γ точно k корней, причем каждый корень учитывается столько раз, какова его кратность. Если же b не равно a, но достаточно близко к нему, то все корни уравнения $f(z) = b$ просты, так как в точках z, не совпадающих с z_0, но достаточно к ней близких, производная $f'(z)$ отлична от нуля. Предложение 4.2 доказано.

5. Приложение к двоякопериодическим функциям. Пусть e_1 и e_2 — два комплексных числа, линейно независимых над полем $\mathbf{R}$, т. е. таких, что $e_1 \neq 0$ и e_2/e_1 не является действительным числом. Совокупность векторов вида $n_1e_1 + n_2e_2$, где n_1 и n_2 — произвольные целые действительные числа, образует дискретную подгруппу Ω аддитивной группы поля $\mathbf{C}$. Говорят, что функция $f(z)$, определенная во всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, является *двоякопериодической функцией с группой периодов* Ω, если каковы бы ни были комплексное число z и целые действительные числа n_1 и n_2, имеет место равенство

$$f(z+n_1e_1+n_2e_2)=f(z). \tag{5.1}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы для всех z выполнялись равенства

$$f(z+e_1)=f(z), \quad f(z+e_2)=f(z). \tag{5.2}$$

Пусть z_0 — некоторое комплексное число. Рассмотрим замкнутый параллелограмм с вершинами в точках z_0, z_0+e_1, z_0+e_2, $z_0+e_1+e_2$. Он состоит из точек вида $z_0+t_1e_1+t_2e_2$, где $0\leqslant t_1\leqslant 1$, $0\leqslant t_2\leqslant 1$. Такой параллелограмм называется *параллелограммом периодов* с вершиной в точке z_0.

Пусть теперь $f(z)$ — двоякопериодическая функция, мероморфная во всей плоскости, и Ω — группа ее периодов. Выберем z_0, такую, чтобы функция $f(z)$ не имела полюсов на границе γ параллелограмма периодов с вершиной в точке z_0. Интеграл $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$ равен нулю в силу периодичности функции γ; в самом деле,

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz=\int\limits_0^1 [f(z_0+te_1)-f(z_0+e_2+te_1)]\,dt+ \\ +\int\limits_0^1 [f(z_0+e_1+te_2)-f(z_0+te_2)]\,dt.$$

Применяя этот результат к логарифмической производной f'/f и учитывая предложение 4.1, получаем

Предложение 5.1. *Если $f(z)$ — двоякопериодическая функция, мероморфная во всей плоскости, то число нулей этой функции, содержащихся в параллелограмме периодов, равно числу ее полюсов, содержащихся в этом параллелограмме.*

Следствие. *Двоякопериодическая функция, голоморфная во всей плоскости* $\mathbf{C}$, *постоянна.*

В противном случае число нулей функции $f(z)-a$ равно числу полюсов, т. е. нулю. Это невозможно, так как a — любое число.

Теперь рассмотрим функцию $zf'(z)/(f(z)-a)$. Эта функция не является периодической, поэтому нельзя утверждать, что интеграл по границе γ параллелограмма периодов равен нулю. Покажем только, что значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{zf'(z)\,dz}{f(z)-a} \tag{5.3}$$

принадлежит группе периодов Ω. В самом деле, этот интеграл равен сумме

$$-\frac{e_2}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a}+\frac{e_1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a},$$

где γ_1 — сторона параллелограмма с началом z_0 и концом z_0+e_1, а γ_2— сторона с началом z_0 и концом z_0+e_2. Значения же интегралов $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a}$ и $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-a}$ — *целые числа.*

С другой стороны, интеграл (5.3) равен сумме вычетов функции $\frac{zf'(z)}{f(z)-a}$. Вычислим эти вычеты. Полюсами этой функции являются полюсы $f'(z)$ и нули $f(z)-a$. Если β_i — полюс, то вычет рассматриваемой функции в нем равен $-k\beta_i$, где k — его кратность. Аналогично, вычет в нуле α_i функции $f(z)-a$ равен $k\alpha_i$, где k — кратность нуля. В результате получаем

Предложение 5.2. *Пусть $f(z)$ — не являющаяся постоянной двоякопериодическая функция, мероморфная во всей плоскости; Ω — группа ее периодов. Тогда для любого комплексного числа a*

$$\sum_i \alpha_i \equiv \sum_i \beta_i \pmod{\Omega},$$

где α_i—корни уравнения $f(z)=a$, а β_i— полюсы (каждый из тех и других считается столько раз, какова его кратность).

В частности, сумма $\sum\limits_i \alpha_i$ по модулю Ω не зависит от a.

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

В этом параграфе мы будем вычислять определенные интегралы без нахождения примитивной для функции, стоящей под знаком интеграла, представляя значение интеграла как сумму вычетов надлежащим образом подобранной голоморфной функции в особых точках. Предлагаемый здесь способ вычисления интегралов не является общим методом, позволяющим решать задачу во всех случаях. Мы ограничимся рассмотрением нескольких классических типов интегралов и покажем для каждого из них, как задача интегрирования может быть сведена к задаче вычисления вычетов.

I тип. Рассмотрим интеграл вида

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin t,\ \cos t)\,dt,$$

где $R(x, y)$ — рациональная функция, не имеющая полюсов на окружности $x^2+y^2=1$. Положим $e^{it}=z$; когда t изменяется от 0 до 2π, z описывает единичную окружность. Следовательно, число I равно произведению $2\pi i$ на сумму вычетов функции

$$\frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$$

в полюсах, содержащихся в единичном круге.

Иначе говоря,

$$I=2\pi\sum \operatorname{Res}\left\{\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\right\},$$

где сумма распространена на полюсы, находящиеся в единичном круге.

Пример. Пусть $I=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\sin t}$, где a — действительное число, большее 1. Тогда

$$I=2\pi\sum \operatorname{Res}\frac{2i}{z^2+2iaz-1}.$$

Единственный полюс этой функции, содержащийся в единичном круге, находится в точке $z_0=-ia+i\sqrt{a^2-1}$; вычет в нем равен $\frac{i}{z_0+ia}=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$, откуда $I=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

II тип. Рассмотрим интеграл вида

$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx,$$

где R — рациональная функция без действительных полюсов. Кроме того, предположим, что интеграл сходится; для этого необходимо и достаточно, чтобы главная часть

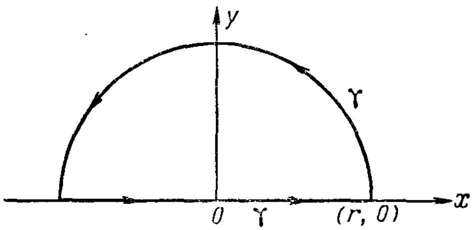


Рис. 6.

$R(x)$ в бесконечности имела вид $\frac{1}{x^n}$, где n — целое число, не меньшее двух. Это условие эквивалентно следующему:

$$\lim_{|x|\to\infty} xR(x)=0. \tag{2.1}$$

Для вычисления интеграла I интегрируем функцию $R(z)$ комплексного переменного z по границе γ полукруга радиуса r с центром в точке 0, расположенного в полуплоскости $y\geqslant 0$ (рис. 6). Для достаточно больших r функция $R(z)$ голоморфна на γ, и интеграл $\int\limits_{\gamma} R(z)dz$ равен сумме вычетов функции R в полюсах, находящихся внутри полукруга, ограничиваемого γ. Следовательно,

$$\int\limits_{-r}^{r} R(x)\,dx+\int\limits_{\delta(r)} R(z)\,dz=2\pi i\sum \operatorname{Res}(R(z)), \tag{2.2}$$

где под $\delta(r)$ понимается полуокружность радиуса r с центром в точке 0, пробегаемая в положительном направлении, а сумма распространена на все полюсы, содержащиеся в полукруге, ограничиваемом кривой γ.

Когда r стремится к бесконечности, первый интеграл в левой части равенства (2.2) стремится к I; как будет доказано, второй интеграл стремится к нулю. Получим равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(R(z)), \tag{2.3}$$

где сумма распространена на все полюсы функции $R(z)$, находящиеся в полуплоскости $y > 0$. Точно так же можно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = -2\pi i \sum \operatorname{Res}(R(z)),$$

где суммирование происходит по всем полюсам, расположенным в полуплоскости $y < 0$.

Остается показать, что $\int\limits_{\delta(r)} R(z)\,dz$ стремится к нулю при r, стремящемся к бесконечности. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ — функция, определенная в секторе*

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2;$$

r и θ обозначают соответственно модуль и аргумент числа z. Если

$$\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0 \qquad (\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2),$$

то интеграл $\int f(z)\,dz$ по дуге окружности радиуса r, содержащейся в секторе $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, стремится к нулю при r, стремящемся к бесконечности.

Действительно, пусть $M(r)$ — верхняя грань модуля $|f(z)|$ на дуге круга $|z| = r$. Тогда

$$\left| \int f(z)\,dz \right| \leqslant M(r)\,r(\theta_2 - \theta_1),$$

откуда и следует утверждение леммы.

Таким же способом можно доказать еще одну лемму.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ — функция, определенная в секторе*

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2;$$

r и θ обозначают соответственно модуль и аргумент числа z. Если

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=0 \quad (\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2),$$

то интеграл $\int f(z)\,dz$ по дуге радиуса r, содержащейся в секторе $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, стремится к нулю при r, стремящемся к нулю.

Пример. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}.$$

Функция $\frac{1}{1+z^6}$ имеет шесть полюсов, три из которых, а именно

$$e^{i\frac{\pi}{6}},\ e^{i\frac{\pi}{2}},\ e^{5i\frac{\pi}{6}},$$

находятся в верхней полуплоскости. Вычет в каждом таком полюсе равен $\frac{1}{6z^5}=-\frac{z}{6}$, откуда

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}=-\frac{\pi i}{6}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{5i\frac{\pi}{6}}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(2\sin\frac{\pi}{6}+1\right)=\frac{\pi}{3}.$$

III тип. Теперь мы изучим интегралы вида

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{ix}\,dx,$$

где $f(z)$ — функция, голоморфная в замкнутой верхней полуплоскости $y \geqslant 0$, за возможным исключением *конечного* множества точек.

Сначала мы рассмотрим случай, когда особые точки не лежат на действительной оси. Тогда интеграл

$$\int_{-r}^{r} f(x)\, e^{ix}\, dx$$

имеет смысл, и при r, стремящемся к $+\infty$, его значение стремится к

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$$

в случае, если последний интеграл сходится.

Мы докажем следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Если* $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ *при* $y \geqslant 0$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z)\, e^{iz}), \tag{3.1}$$

где сумма распространена на все особые точки функции $f(z)$, *находящиеся в верхней полуплоскости* $y > 0$.

Заметим сначала, что если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$ абсолютно сходится; в этом случае соотношение (3.1) означает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f(z)\, e^{iz}). \tag{3.2}$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix} dx$ может также сходиться неабсолютно. Например, хорошо известно, что если функция $f(x)$ монотонна при $x > 0$ и стремится к нулю при $x \to +\infty$, то интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\, e^{ix}\, dx$ сходится, вообще говоря, неабсолютно. В этом случае также выполнено соотношение (3.2).

Прежде чем приступить к доказательству предложения 3.1, заметим, что в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$ выполнено неравенство $|e^{iz}| \leqslant 1$. Это говорит о том, что целесообразно произвести интегрирование в полуплоскости $y \geqslant 0$ по тому же контуру, что и в случае интегралов второго типа.

Мы покажем в обозначениях формулы (2.2), что *интеграл* $\int\limits_{\delta(r)} f(z)\, e^{iz}\, dz$ *стремится к нулю при* r, *стремящемся к* $+\infty$. Отсюда, очевидно, будет следовать предложение 3.1.

Если известно, что $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, то достаточно применить лемму 1. Например, рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx \right).$$

Значение интеграла, стоящего в правой части, равно $\pi i \sum \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right)$, где суммирование распространено на полюсы, расположенные в верхней полуплоскости. Функция $\frac{e^{iz}}{z^2+1}$ имеет только один такой полюс $z=i$; это простой полюс, и вычет в нем равен

$$\frac{e^{-1}}{2i},$$

откуда

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Для того чтобы доказать, что $\int\limits_{\delta(r)} f(z)\, e^{iz}\, dz$ стремится к нулю *в условиях предложения* 3.1, используем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* $f(z)$ — *функция, определенная в секторе* $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ *полуплоскости* $y \geqslant 0$.

Если $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)=0$, *то интеграл* $\int f(z)\,e^{iz}\,dz$ *по дуге окружности радиуса* r, *заключенной в этом секторе, стремится к нулю при* r, *стремящемся к бесконечности.*

В самом деле, положим $z=re^{i\theta}$. Пусть $M(r)$ — верхняя грань модуля $|f(re^{i\theta})|$ при данном r, когда θ меняется таким образом, что точка $re^{i\theta}$ остается внутри сектора. Тогда

$$\left|\int f(z)\,e^{iz}\,dz\right|\leqslant M(r)\int\limits_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}\,r\,d\theta. \tag{3.3}$$

Теперь для доказательства леммы 3 остается показать, что значение интеграла $\int\limits_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}\,r\,d\theta$ можно мажорировать не зависящим от r числом. В действительности имеет место равенство

$$\int\limits_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}r\,d\theta=2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}r\,d\theta\leqslant\pi. \tag{3.4}$$

Доказательство неравенства (3.4). Если $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin\theta}{\theta}\leqslant 1,$$

откуда

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}r\,d\theta\leqslant\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta}r\,d\theta\leqslant\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta}r\,d\theta=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, предложение 3.1 доказано.

Теперь рассмотрим случай, когда функция $f(z)$ может иметь особые точки на действительной оси. Мы ограничимся рассмотрением одного примера, когда функция $f(z)$ имеет простой полюс в начале координат. Тогда оказывается целесообразным изменить путь, по которому производится интегрирование, обогнув начало координат по полуокружности $\gamma(\varepsilon)$ малого радиуса $\varepsilon>0$ с центром в начале координат, расположенной в верхней полуплоскости (рис. 7). Мы будем опираться на следующую лемму.

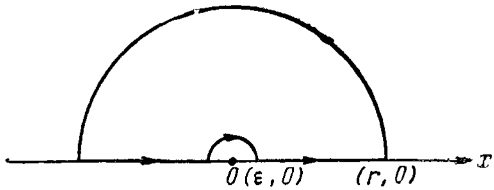


Рис. 7.

Лемма 4. *Если в точке $z = 0$ функция $g(z)$ имеет простой полюс, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\gamma(\varepsilon)} g(z)\,dz = \pi i \operatorname{Res}(g, 0), \tag{3.5}$$

где $\gamma(\varepsilon)$ пробегается в направлении возрастания аргумента.

В самом деле, $g(z) = \frac{a}{z} + h(z)$, где $h(z)$ — функция, голоморфная в начале координат. Интеграл $\int\limits_{\gamma(\varepsilon)} h(z)\,dz$ стремится к нулю при ε, стремящемся к нулю, а интеграл $\int\limits_{\gamma(\varepsilon)} \frac{a}{z}\,dz$ равен $\pi i a$. Лемма доказана.

Эта лемма применяется к функции $g(z) = f(z)\,e^{iz}$.

Пример. Пусть требуется найти интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2i}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{+\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx\right].$$

Как видно из рис. 7, этот предел равен

$$\frac{1}{2i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Важное замечание. Если требуется вычислить не $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$, а $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix}\, dx$, то следует интегрировать не в верхней, а в *нижней* полуплоскости, так как модуль $|e^{-iz}|$ ограничен в нижней полуплоскости и справедлива лемма 3.

Вообще интеграл вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ax}\, dx$, где a — некоторое комплексное число, вычисляется с помощью интегрирования в полуплоскости, в которой $|e^{az}| \leqslant 1$.

Следует помнить, что функции $\sin z$, $\cos z$ *не ограничены ни в какой полуплоскости.* Для того чтобы вычислить интеграл одного из видов

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin^n x\, dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos^n x\, dx,$$

следует выразить тригонометрические функции через экспоненциальные, чтобы можно было применить предыдущий метод.

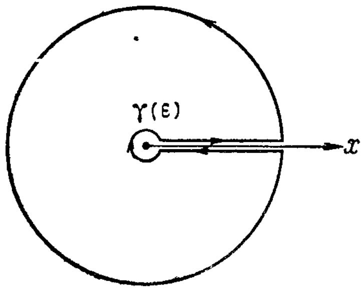
IV тип. Рассмотрим интегралы вида

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{R(x)}{x^{\alpha}}\, dx,$$

где α — действительное число, $0 < \alpha < 1$, а R — рациональная функция без полюсов на действительной полуоси $x \geqslant 0$. Ясно, что этот интеграл сходится вблизи нижнего предела интегрирования 0. Для того чтобы он сходился вблизи верхнего предела интегрирования $+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция $R(x)$ имела в бесконечности главную часть вида $\frac{1}{x^n}$, где $n \geqslant 1$; иначе говоря, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x \to +\infty} R(x) = 0. \tag{4.1}$$

Для вычисления такого интеграла рассмотрим функцию $f(z)=\frac{R(z)}{z^{\alpha}}$ комплексного переменного z, определенную в области D, которая получается из комплексной плоскости исключением положительной полуоси $x \geqslant 0$. Мы должны уточнить, какую непрерывную ветвь функции z^{α} в области



Р и с. 8.

D мы выбрали. Для этого достаточно выбрать непрерывную ветвь аргумента $\arg z$. Выберем ту, для которой $\arg z$ заключен между 0 и 2π.

Проинтегрируем теперь функцию $\frac{R(z)}{z^{\alpha}}$ по замкнутому пути $\delta(r, \varepsilon)$, определенному следующим образом: начиная от точки $\varepsilon > 0$ на действительной оси путь идет по действительной оси в направлении возрастания до точки $r > 0$; затем он обходит в положительном направлении окружность $\gamma(r)$ радиуса r с центром в начале координат; затем идет по действительной оси от r до ε и, наконец, обходит в отрицательном направлении окружность $\gamma(\varepsilon)$ радиуса ε с центром в начале координат (см. рис. 8). Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta(r,\,\varepsilon)}\frac{R(z)}{z^{\alpha}}\,dz$$

равен, если r достаточно велико, а ε — достаточно мало, сумме вычетов функции $\frac{R(z)}{z^{\alpha}}$ в полюсах, содержащихся в области D. Имеем:

$$\int\limits_{\delta(r,\,\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz = \int\limits_{\gamma(r)} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz + \int\limits_{\gamma(\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz + (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx,$$

так как $z^\alpha = e^{2\pi i\alpha}|z|^\alpha$ при $\arg z = 2\pi$. Поскольку аргумент z есть величина ограниченная, функция $zf(z)$ стремится к нулю как при z, стремящемся к нулю, так и при $|z|$, стремящемся к бесконечности. Следовательно, в силу лемм 1 и 2, интегралы по $\gamma(r)$ и $\gamma(\varepsilon)$ стремятся к нулю соответственно при r, стремящемся к бесконечности, и ε, стремящемся к нулю. Переходя к пределу, получаем

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha})\, I = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}\right). \tag{4.2}$$

Это соотношение позволяет вычислить величину I.

Пример. Пусть требуется найти интеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}$ $(0 < \alpha < 1)$. Здесь $R(z) = \frac{1}{1+z}$. Эта функция имеет единственный полюс в точке $z = -1$. Вычет функции $\frac{R(z)}{z^\alpha}$ в этом полюсе равен $\frac{1}{e^{\pi i\alpha}}$ (мы считаем, что выбрана та непрерывная ветвь аргумента z, которая равна π в этой точке). Из соотношения 4.2 получаем

$$I = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

V тип. Рассмотрим интегралы вида

$$\int\limits_0^\infty R(x) \log x\,dx,$$

где R — рациональная функция без полюсов на действительной полуоси $x \geqslant 0$, такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} xR(x) = 0$. Последнее условие обеспечивает сходимость интеграла.

Рассмотрим ту же самую область D и тот же самый путь интегрирования, что и при вычислении интегралов IV-го типа. Как и в предыдущем случае, мы должны условиться о том, какую непрерывную ветвь функции $\log z$

мы выберем. Мы снова будем считать, что аргумент z заключен между 0 и 2π. По причинам, которые вскоре станут ясны, мы будем интегрировать не функцию $R(z)\log z$, а функцию $R(z)(\log z)^2$. Как и в предыдущем случае, согласно леммам 1 и 2, интегралы по окружностям $\gamma(r)$ и $\gamma(\varepsilon)$ стремятся к нулю соответственно при r, стремящемся к бесконечности, и ε, стремящемся к нулю. Если аргумент z равен 2π, то

$$\log z = \log x + 2\pi i,$$

где через x обозначен модуль числа z. Мы получаем соотношение

$$\int_0^\infty R(x)(\log x)^2\,dx - \int_0^\infty R(x)(\log x + 2\pi i)^2\,dx =$$
$$= 2\pi i \sum \operatorname{Res}\{R(z)(\log z)^2\},$$

откуда

$$-2\int_0^\infty R(x)\log x\,dx - 2\pi i\int_0^\infty R(x)\,dx = \sum \operatorname{Res}\{R(z)(\log z)^2\}. \tag{5.1}$$

Это равенство представляет собой соотношение между двумя интегралами: $\int_0^\infty R(x)dx$ и $\int_0^\infty R(x)\log x\,dx$. Однако если предположить, что рациональная функция R является *действительной* (т. е. принимает действительные значения при действительных x), то, разделяя в равенстве (5.1) действительные и мнимые части, можно получить два соотношения:

$$\int_0^\infty R(x)\log x\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum \operatorname{Res}\{R(z)(\log z)^2\}\right), \tag{5.2}$$

$$\int_0^\infty R(x)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left(\sum \operatorname{Res}\{R(z)(\log z)^2\}\right). \tag{5.3}$$

Сумма в обоих случаях распространена на все полюсы рациональной функции $R(z)$, содержащиеся в D.

Пример. Пусть требуется найти интеграл

$$I=\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx.$$

Вычет функции $\frac{(\log z)^2}{(1+z)^3}$ в полюсе $z=-1$ равен коэффициенту при t^2 в разложении функции $(i\pi+\log(1-t))^2$ в ряд Тейлора. Последний равен $1-i\pi$; следовательно, $I=-\frac{1}{2}$.

Замечание. Интегрируя функцию $R(z)\log z$, мы получаем тем же путем формулу

$$\int_0^\infty R(x)\,dx=-\sum \operatorname{Res}\{R(z)\log z\}. \tag{5.4}$$

Этот же метод может быть применен и в том случае, когда рациональная функция R имеет в точке $x=1$ *простой полюс*. В этом случае интеграл $\int_0^\infty R(x)\log x\,dx$ также

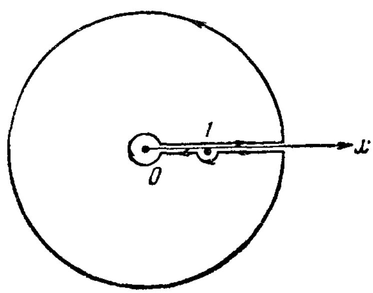


Рис. 9.

имеет смысл, так как главная непрерывная ветвь логарифма в точке $x=1$ имеет простой нуль. Для того чтобы найти этот интеграл, нужно несколько изменить путь интегрирования, а именно, на том участке пути, который проходит по действительной оси в направлении убывания, нужно обойти точку $z=1$ по полуокружности малого радиуса с центром в этой точке, проходящей в нижней полуплоскости (рис. 9).

Читателю предлагается доказать (для случая, когда функция R действительна) соотношение

$$\int_0^\infty R(x)\log x\,dx = \pi^2 \operatorname{Re}(\operatorname{Res}(R,\ 1)) - \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum \operatorname{Res}(f)\right), \tag{5.5}$$

где под f понимается функция $R(z)(\log z)^2$ и суммирование производится по всем полюсам функции f, кроме точки $z = 1$. Можно проверить, например, что

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная при $|z| < R$, $R > 1$. Вычислив двумя различными способами интегралы

$$\int_\delta \left(2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}\,dz,$$

где δ — единичная окружность, пробегаемая в положительном направлении, доказать следующие равенства:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2f(0) + f'(0),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2f(0) - f'(0).$$

2. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в некоторой области, содержащей круг $|z| \leqslant R$, и пусть γ — образ окружности $|z| = R$ при отображении $z \to f(z)$; предположим также, что функция f задает однолистное отображение, т. е. $f(z) \neq f(z')$ при $z \neq z'$. Показать, что длина

L пути γ равна $R\int\limits_0^{2\pi} |f'(Re^{i\theta})|\, d\theta$ и вывести отсюда, что

$$L \geqslant 2\pi R\,|f'(0)|.$$

Показать, что при тех же условиях площадь A образа замкнутого круга $|z| \leqslant R$ при том же отображении находится по формуле

$$A = \iint\limits_{|z| \leqslant R} |f'(x+iy)|^2\, dx\, dy$$

и вывести отсюда следующее неравенство:

$$A \geqslant \pi R^2\,|f'(0)|^2.$$

(Перейти к полярным координатам и заметить, что при $0 \leqslant r \leqslant R$, в силу неравенства Коши — Шварца для интегралов, имеем

$$|f'(0)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\left|\int\limits_0^{2\pi} f'(re^{i\theta})\, d\theta\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2\, d\theta.)$$

3. Доказать, что если функция $f(z)$ голоморфна в некоторой области, содержащей замкнутый круг $|z| \leqslant 1$, то

$$\int\limits_\delta \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\, dz = \begin{cases} \overline{f(0)}, & \text{если } |a| < 1, \\ \overline{f(0)} - \overline{f(1/\bar{a})}, & \text{если } |a| > 1, \end{cases}$$

где δ — единичная окружность, пробегаемая в положительном направлении. (Использовать упражнение 1б к гл. II и интегральную формулу Коши.)

4. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная во всей плоскости. Предположим, что существуют целое число n и два действительных положительных числа R и M, такие, что при $|z| \geqslant R$ выполнено неравенство

$$|f(z)| \leqslant M \cdot |z|^n.$$

Доказать, что тогда функция f представляет собой полином степени не выше n.

5. Пусть f — функция, не являющаяся постоянной, голоморфная в области D, а D' — область, замыкание $\overline{D}'$ которой компактно и содержится в D. Показать, что если модуль $|f(z)|$ постоянен на границе D', то внутри D' находится по крайней мере один нуль функции $f(z)$. (Доказывается от противного с привлечением функции $1/f(z)$.)

6. Пусть D — ограниченная область на плоскости $\mathbf{R}^2$. Рассмотрим n точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ в плоскости $\mathbf{R}^2$. Доказать, что произведение $\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} \ldots \overline{PP_n}$ расстояний от этих точек до переменной точки P, содержащейся в замыкании $\overline{D}$, достигает своего максимума на границе области D.

7. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в круге $|z| < R$. Положим $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$ при $0 \leqslant r < R$. Доказать, что

а) $M(r)$ есть непрерывная неубывающая функция переменного r при $0 \leqslant r < R$;

б) если $f(z)$ не является постоянной, то $M(r)$ строго возрастает.

8. Теорема «о трех кругах» Адамара: пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в некоторой области, содержащей замкнутое кольцо

$$r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2 \quad (0 < r_1 < r_2);$$

положим $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$ при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. Доказать, что имеет место следующее неравенство:

$$M(r) \leqslant [M(r_1)]^{\frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1}} [M(r_2)]^{\frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}} \tag{1}$$

при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. (Применить принцип максимума к функции $z^p (f(z))^q$, где p и q — целые числа, причем $q > 0$; выбрать такое действительное α, чтобы выполнялось равенство $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$, и последовательность пар целых чисел (p_n, q_n), таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n/q_n = \alpha$.) Проверить, что неравенство (1) означает, что $\log M(r)$ есть выпуклая функция от $\log r$ при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

9. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная при $|z| < R$. Положим

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta$$

при $0 \leqslant r < R$. Показать, что если a_n — n-й коэффициент Тейлора функции $f(z)$ в точке $z = 0$, то

$$I_2(r) = \sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Отсюда вывести, что при $0 \leqslant r < R$

(1) $I_2(r)$ есть непрерывная неубывающая функция переменного r;

(2) имеет место неравенство $|f(0)|^2 \leqslant I_2(r) \leqslant (M(r))^2$ (определение $M(r)$ см. в упражнении 7);

(3) если функция f не есть тождественный нуль, то $\log I_2(r)$ — выпуклая функция от $\log r$. (Показать, что если положить

$$s = \log r, \quad J(s) = I_2(e^s) = \sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 e^{2ns},$$

то

$$(\log J)'' = \frac{J''J - (J')^2}{J^2}.$$

Для того чтобы показать, что $J''J - (J')^2 \geqslant 0$, нужно воспользоваться неравенством Коши — Шварца

$$\Big|\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \bar{\beta}_n\Big|^2 \leqslant \Big(\sum_{n \geqslant 0} |\alpha_n|^2\Big)\Big(\sum_{n \geqslant 0} |\beta_n|^2\Big)$$

для абсолютно сходящихся рядов.)

10. Пусть f — функция, голоморфная в круге $|z| < 1$ и такая, что в этом круге $|f(z)| < 1$. Если в этом круге существуют две различные точки a и b, такие, что $f(a) = a$, $f(b) = b$, то во всем этом круге $f(z) = z$. (Рассмотреть функцию $g(z) = \dfrac{h(z) - a}{1 - \bar{a}h(z)}$, где $h(z) = f\left(\dfrac{z + a}{1 + \bar{a}z}\right)$, для которой $g(0) = 0$, $g\left(\dfrac{b - a}{1 - \bar{a}b}\right) = \dfrac{b - a}{1 - \bar{a}b}$ и $|g(z)| < 1$ во всем круге.)

11. Пусть f — функция, голоморфная в области, содержащей круг $|z| \leqslant R$. Положим для $0 \leqslant r \leqslant R$

$$A(r) = \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \operatorname{Re} f(re^{i\theta}).$$

(1) Доказать, что $A(r)$ есть непрерывная неубывающая функция аргумента r (воспользоваться тем, что $e^{\operatorname{Re} f(z)} = |e^{f(z)}|$).

(2) Доказать, что если, сверх того, $f(0) = 0$, то при $0 \leqslant r < R$ справедливо неравенство

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r} A(R).$$

[Рассмотреть функцию $g(z) = f(z)/(2A(R) - f(z))$.]

(3) Доказать, что при $0 \leqslant r < R$

$$M(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\{A(R) + |f(0)|\}.$$

12. Пусть x — комплексный параметр.

(1) Доказать, что разложение в ряд Лорана функции

$$\exp[x(z+1/z)/2]$$

в точке $z=0$ имеет при $0 < |z| < +\infty$ следующий вид:

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right] = a_0 + \sum_{n \geqslant 1} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos t}\cos nt\,dt \qquad (n \geqslant 0).$$

Доказать, что функция $\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$ имеет при $0 < |z| < +\infty$ следующее разложение в ряд Лорана:

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right] = b_0 + \sum_{n \geqslant 1} b_n \left(z^n + \frac{(-1)^n}{z^n}\right),$$

где

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin t)\,dt \qquad (n \geqslant 0).$$

(Воспользоваться тем, что если $z' = -1/z$, то
$\exp[x(z'-1/z')/2] = \exp[x(z-1/z)/2]$ при $0<|z|<+\infty$.

(2) Пусть m, n — два целых неотрицательных числа. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{(z^2\pm 1)^m\,dz}{z^{m+n+1}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\pm 1)^p\,(n+2p)!}{p!\,(n+p)!}, & \text{если } m = n+2p, \text{ где } p \geqslant 0 \text{ — целое число},\\ 0 & \text{во всех остальных случаях,}\end{cases}$$

и получить отсюда разложение в степенные ряды для a_n и b_n как функций x (b_n как функция x называется функцией Бесселя первого рода.)

13. Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в окрестности точки $z=0$ и имеющая в этой точке простой полюс. Пусть x — некоторое комплексное число. Доказать, что разложение в ряд Лорана по z функции

$$f'(z)/(f(z)-x)$$

имеет следующий вид:

$$-\frac{1}{z}+u_1+u_2z+\ldots+u_{n+1}z^n+\ldots,$$

где u_n — полином от x степени точно n. [Можно использовать разложение Тейлора функции $zf(z)$.]

14. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в верхней полуплоскости P^+ ($\operatorname{Im} z>0$); предположим, что $f(z+1) = f(z)$ для всех $z\in P^+$. Доказать, что существует функция $g(t)$, голоморфная в круге с выколотым центром $0<|t|<1$, такая, что

$$f(z) = g(e^{2\pi i z})$$

при $z\in P^+$. Вывести отсюда, что функция $f(z)$ может быть разложена в ряд следующего вида:

$$f(z) = \sum_{-\infty<n<+\infty} a_n e^{2\pi i n z},$$

где

$$a_n = \int\limits_0^1 f(x+iy)\,e^{-2\pi i n(x+iy)}\,dx \qquad (y>0 \text{ — любое}).$$

Показать, что этот ряд нормально сходится в любом компакте в полуплоскости P^+. Показать, что если существуют постоянная $M > 0$ и целое число n_0, такие, что неравенство

$$|f(x+iy)| \leqslant Me^{2\pi n_0 y}$$

справедливо для всех достаточно больших y равномерно по x, то предыдущее разложение имеет вид

$$f(z) = \sum_{n \geqslant -n_0} a_n e^{2\pi i n z}.$$

15. (1) Доказать, что функция $f(z) = 1/(e^z - 1)$ мероморфна во всей плоскости и точки вида $2p\pi i$, где p — целое число, являются ее простыми полюсами. Найти разложение этой функции в ряд Лорана в точке $z = 2p\pi i$. Пусть a_n $(n \geqslant -1)$— коэффициенты этого ряда при $p = 0$, и пусть

$$B_n = (-1)^{n-1}(2n)!\, a_{2n-1} \qquad (n \geqslant 1).$$

Доказать, что при $n \geqslant 1$ имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{2(2n)!} + \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \frac{(-1)^{\nu-1} B_\nu}{(2\nu)!\,(2n-2\nu+1)!} = 0$$

[приравнять коэффициенты при степенях z в двух частях равенства

$$\Big(a_{-1}/z + \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{m \geqslant 1} z^m/m!\Big) = 1].$$

(2) Пусть

$$f_{2n}(z) = \frac{1}{z^{2n}(e^z - 1)},$$

где $n \geqslant 1$. Обозначим через γ_m границу квадрата с вершинами в точках $\pm(2m+1)\pi \pm (2m+1)\pi i$. Показать, что если точка z лежит на γ_m, то

$$|f_{2n}(z)| \leqslant 2/[(2m+1)\pi]^{2n},$$

и получить отсюда, интегрируя $f_{2n}(z)$ по контуру γ_m, пробегаемому в положительном направлении, и переходя к пределу при $m \to \infty$, что

$$\sum_{p \geqslant 1} 1/p^{2n} = \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2\,(2n)!}.$$

(Числа B_n называются числами Бернулли.)

16. Предположим, что точка c является существенно особой для функции $f(z)$, голоморфной в круге с выколотой точкой $0 < |z-c| < \varrho$.

(1) Доказать, что, каковы бы ни были $\gamma \in \mathbf{C}$ и $\varepsilon > 0$, существуют точка $z' \in D$ и действительное число $\varepsilon' > 0$, такие, что

$$\bar{\Delta}(f(z'), \varepsilon') \subset \Delta \cap \Delta(\gamma, \varepsilon),$$

где Δ — образ области D при преобразовании $z \to f(z)$; $\Delta(b, r)$ и $\bar{\Delta}(b, r)$ обозначают соответственно открытый и замкнутый круг радиуса r с центром в точке b. (Заметить, что, в силу предложения 4.2 § 5, множество Δ *открыто* (это следует также из теоремы, доказанной в п. 3 § 1 гл. VI), и воспользоваться теоремой Вейерштрасса, п. 4 § 4.)

(2) Пусть $n \geqslant 0$. Обозначим через D_n круг с выколотым центром $0 < |z-c| < \varrho/2^n$ и через Δ_n — его образ при преобразовании $z \to f(z)$. Пусть $\gamma_0 \in \mathbf{C}$ — некоторая точка и $\varepsilon_0 > 0$ — некоторое число. Доказать индукцией по n, что существуют последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n \geqslant 1}$ положительных чисел и последовательность $\{z_n\}_{n \geqslant 1}$ точек области D, удовлетворяющие следующим условиям:

$$z_n \in D_n, \quad \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots, \quad f(z_1) = \gamma_0,$$

$$\bar{\Delta}(f(z_{n+1}), \varepsilon_{n+1}) \subset \Delta_n \cap \Delta(f(z_n), \varepsilon_n).$$

Вывести отсюда, что существует последовательность $\{c_n\}_{n \geqslant 0}$ точек D, таких, что

$$\lim c_n = c \text{ и } f(c_n) = c \text{ для любого } n$$

и что функция $f(z)$ не задает однолистного отображения ни в какой области вида $0 < |z-c| < r$, где r — сколь угодно малое положительное число.

17. Пусть φ: $(x, y, u) \to z$ — стереографическая проекция сферы S_2 с выколотой точкой P на плоскость $\mathbf{C}$.

(1) Выразить x, y и u как функции z.

(2) Показать, что если C — окружность на сфере $\mathbf{S}_2$, не проходящая через точку P, то $\varphi(C)$ есть окружность на плоскости $\mathbf{C}$; если же окружность C проходит через точку P, то $\varphi(C \setminus P)$ есть прямая на плоскости $\mathbf{C}$.

(3) Пусть z_1, $z_2 \in \mathbf{C}$; для того чтобы точки $\varphi^{-1}(z_1)$ и $\varphi^{-1}(z_2)$ были диаметрально противоположными на сфере $\mathbf{S}_2$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $z_1 \cdot \bar{z}_2 = -1$.

(4) Доказать, что расстояние $\overline{P_1P_2}$ (в пространстве $\mathbf{R}^3$) между точками

$$P_1 = \varphi^{-1}(z_1), \quad P_2 = \varphi^{-1}(z_2)$$

может быть найдено по следующей формуле:

$$\overline{P_1P_2} = \frac{2\,|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}.$$

Во что переходит эта формула, когда z_2 стремится к бесконечности?

18. Доказать, что функция, мероморфная на всей сфере Римана, рациональна. (Сначала доказать, что такая функция имеет не более чем конечное множество полюсов.)

19. Теорема Руше. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две функции, голоморфные в области D; $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i \in I}$ — ориентированная граница компакта K, содержащегося в области D. Доказать, что если

$$|f(z)| > |g(z)| \text{ при } z \in \Gamma,$$

то число нулей функции $f(z) + g(z)$ в компакте K равно числу нулей функции $f(z)$ в компакте K. (Рассмотреть замкнутые пути $f \circ \Gamma_i$, $i \in I$, и применить предложение 4.1 из § 5 и предложение 8.3 из § 1 гл. II.)

Пример. Если функция $f(z)$ голоморфна в некоторой области, содержащей замкнутый круг $|z| \leqslant 1$, и если $|f(z)| < 1$ при $|z| = 1$, то уравнение $f(z) = z^n$ имеет точно n решений при $|z| < 1$ для всех целых чисел $n \geqslant 0$.

20. Найти следующие интегралы с помощью вычетов:

(1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$ $(a,\ b>0)$,

(2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx$ (a и b действительны),

(3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$ $(a>0)$,

(4) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos nt\,dt}{1-2a\cos t+a^2}$ $(a \neq 1)$ (проинтегрировать функцию $z^n/(z-a)(z-1/a)$ по единичной окружности).

21. Проинтегрировать функцию $f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)\log z}$ (где $\log$ означает непрерывную ветвь логарифма, соответствующую значениям $\arg z$, заключенным между $-\pi$ и π) по пути $\delta(r,\ \varepsilon)$, определенному следующим образом: из точки $-r$ на действительной полуоси путь $\delta(r,\ \varepsilon)$ проходит в направлении возрастания в точку $-\varepsilon$; затем обходит в отрицательном направлении окружность $\gamma(\varepsilon)$ радиуса ε с центром в точке 0, затем возвращается по отрицательной полуоси в точку $-r$ и, наконец, обходит в положительном направлении окружность $\gamma(r)$ с центром в точке 0 радиуса r $(0<\varepsilon<a<r)$. Показать, что

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)((\log x)^2+\pi^2)} = \frac{\pi}{2a((\log a)^2+\pi^2/4)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

22. Пусть $a>0$, ν — действительное число. Проинтегрировав функцию $\frac{e^{i\nu z}}{\operatorname{ch} z+\operatorname{ch} a}$ по периметру прямоугольника с вершинами $\pm R$, $\pm R+2\pi i$, показать, что

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos \nu x\,dx}{\operatorname{ch} x+\operatorname{ch} a} = \frac{\pi \sin \nu a}{\operatorname{sh} \pi\nu\, \operatorname{sh} a}.$$

23. (1) Пусть $n \geqslant 2$ — целое число. Интегрируя функцию $1/(1+z^n)$ по замкнутому контуру, состоящему из отрезка $[0, R]$ действительной оси, дуги Re^{it} $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi/n)$ и отрезка $re^{2\pi i/n}$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$, доказать, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

(2) Пусть $n \geqslant 2$ — целое число, α — действительное число, такое, что $n > 1+\alpha > 0$. Вычислить тем же способом интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^\alpha\, dx}{1+x^n}.$$

24. Пусть p и q — два положительных числа, $n \geqslant 1$ — целое. Интегрируя функцию $z^{n-1}e^{-z}$ по контуру, аналогичному тому, который использовался в упражнении 23, но с углами в начале координат, выбранными подходящим для данной задачи образом, доказать следующие соотношения:

$$\int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-px}\cos qx\, dx = \frac{(n-1)!\,\mathrm{Re}\,(p+iq)^n}{(p^2+q^2)^n},$$

$$\int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-px}\sin qx\, dx = \frac{(n-1)!\,\mathrm{Im}\,(p+iq)^n}{(p^2+q^2)^n}.$$

$\left(\text{Напомним, что } \int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\, dx = (n-1)!.\right)$

25. (1) Доказать, что функция $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ мероморфна во всей комплексной плоскости, причем точки $z=n$ $(n \in \mathbf{Z})$ являются ее простыми полюсами, и ее вычеты во всех этих точках равны 1. Пусть

$$f(z) = P(z)/Q(z)$$

— рациональная дробь, причем ст. $Q >$ ст. $P+1$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — полюсы функции $f(z)$, а $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ — вычеты, соответствующие этим полюсам. Предположим, кроме того, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ нет целых действительных. Пусть n — целое положительное число. Обозначим через γ_n периметр квадрата с вершинами $\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)i$. Доказать, что существуют два действительных положительных числа M_1 и K, не зависящих от n и таких, что

а) $|\pi \operatorname{ctg} \pi z| \leqslant M_1$ при $z \in \gamma_n$,

б) $|f(z)| \leqslant \frac{K}{|z|^2}$, если $|z|$ достаточно велик.

Вывести из этого, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma_n} f(z)\, \pi \operatorname{ctg} \pi z\, dz = 0$$

и что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n\leqslant p\leqslant n} f(p) = -\sum_{1\leqslant q\leqslant m} b_q \pi \operatorname{ctg} \pi a_q. \qquad (1)$$

(Замечание: из б) вытекает, что $\lim\limits_{n,\, n'\to\infty} \sum\limits_{-n\leqslant p\leqslant n'} f(p)$ существует; следовательно, левую часть равенства (1) можно заменить на $\sum\limits_{-\infty\leqslant p\leqslant\infty} f(p)$.)

Примеры: $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/(a+bn^2)$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^2/(n^4+a^4)$ (a и b — действительные положительные числа).

(2) Показать, что это утверждение остается верным и при условии ст. $Q >$ ст. P. [Сначала показать, что можно написать $f(z) = g(z) + c/z$, где c — константа, а $g(z)$ — рациональная дробь, удовлетворяющая условиям из (1). Затем показать, что $\int\limits_{\gamma_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z}\, dz = 0$ (интегралы, взятые по двум противоположным сторонам квадрата, взаимно уничтожаются).

Замечание. $\lim\limits_{n,\, n'\to\infty} \sum\limits_{-n\leqslant p\leqslant n'} f(p)$, вообще говоря, не существует.]

Пример. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n\leqslant p\leqslant n} \frac{1}{x-p}$$

и с его помощью сумму $\sum\limits_{p\geqslant 1} \frac{1}{x^2-p^2}$, где x — не целое число.

(3) Пусть α — действительное число, такое, что $-\pi < \alpha < \pi$. Доказать, что

в) существует действительное положительное число M_2, не зависящее от n, такое, что при $z \in \gamma_n$

$$\left| \frac{e^{i\alpha z}}{\sin \pi z} \right| \leqslant M_2.$$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma_n} \frac{e^{i\alpha z}}{z \sin \pi z}\, dz = 0.$

(Заметить, что справедливо равенство

$$\int\limits_{\gamma_n} \frac{e^{i\alpha z}}{z \sin \pi z}\, dz = 2i \int\limits_{\gamma_n'} \frac{\sin \alpha z}{z \sin \pi z}\, dz + 2i \int\limits_{\gamma_n''} \frac{\sin \alpha z}{z \sin \pi z}\, dz,$$

где γ_n' и γ_n'' означают соответственно отрезок $z = n + \frac{1}{2} + iy$, $|y| \leqslant n + \frac{1}{2}$, и отрезок $z = x + i\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $|x| \leqslant n + \frac{1}{2}$, и использовать упражнение 14 к гл. I.) Наконец, вывести отсюда, что если $f(z)$ — рациональная дробь, удовлетворяющая условиям (2), то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{-n\leqslant p\leqslant n} (-1)^p f(p)\, e^{i\alpha p} = -\pi \sum_{1\leqslant q\leqslant m} b_q \frac{e^{i\alpha a_q}}{\sin \pi a_q}.$$

Пример: пусть $f(z) = 1/(x - z)$; показать, что при $-\pi < \alpha < \pi$ справедливы равенства

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\cos \alpha n}{x^2 - n^2} = \frac{\pi}{2x} \frac{\cos \alpha x}{\sin \pi x} - \frac{1}{2x^2},$$

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n \sin \alpha n}{x^2 - n^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin \alpha x}{\sin \pi x},$$

где $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Глава IV

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ; ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ С МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

В дальнейшем, для упрощения записи, мы ограничимся рассмотрением случая двух переменных, но все рассуждения без труда переносятся на случай произвольного конечного числа переменных.

1. Алгебра $K[[X, Y]]$. Формальным степенным рядом от X и Y с коэффициентами в поле K называется выражение вида $S(X, Y) = \sum\limits_{p, q \geq 0} a_{p, q} X^p Y^q$, где коэффициенты $a_{p, q}$ принадлежат полю K.

Можно определить, как в § 1 гл. I, сложение формальных степенных рядов и умножение формального степенного ряда на скаляр. Множество $K[[X, Y]]$ степенных рядов таким образом снабжено структурой векторного пространства над полем K. Можно определить произведение двух формальных степенных рядов; в результате $K[[X, Y]]$ становится алгеброй.

Определим *порядок* формального степенного ряда, не равного тождественно нулю, как наименьшее целое n, такое, что

$$\sum_{p+q=n} a_{p, q} X^p Y^q \neq 0.$$

Можно показать, что порядок произведения двух рядов, не равных нулю, равен сумме порядков этих рядов. В частности, $K[[X, Y]]$ является областью целостности.

Мы не будем развивать здесь теорию подстановок формальных степенных рядов вместо символов X, Y, которая не представляет, впрочем, никаких особых трудностей. Подставляемые ряды должны иметь порядок, больший или равный единице. В качестве упражнения читатель может доказать предложение, аналогичное предложению 5.1 § 1 гл. I.

2. Область сходимости степенного ряда с несколькими переменными. В дальнейшем мы будем предполагать, что поле K есть либо поле $\mathbf{R}$, либо поле $\mathbf{C}$. Так же, как и в п. 3 § 2 гл. I, поставим в соответствие каждому формальному степенному ря у

$$\sum_{p,\, q \geqslant 0} a_{p,\, q} X^p Y^q$$

ряд с неотрицательными членами

$$\sum_{p,\, q \geqslant 0} |a_{p,\, q}| r_1^p r_2^q,$$

где r_1 и r_2 — действительные переменные, бо́льшие или равные 0.

Пусть Γ — множество точек (r_1, r_2) четверти плоскости $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, в которых

$$\sum_{p,\, q} |a_{p,\, q}| r_1^p r_2^q < +\infty.$$

Если точка (r_1, r_2) принадлежит множеству Γ, то ряд $\sum\limits_{p,\, q} a_{p,\, q} z_1^p z_2^q$ *абсолютно сходится* для любой пары (z_1, z_2) комплексных чисел, таких, что $|z_1| \leqslant r_1$, $|z_2| \leqslant r_2$. Множество Γ непусто, так как оно, очевидно, содержит начало координат (0, 0).

Определение. *Областью сходимости* ряда $S(X, Y)$ мы назовем совокупность Δ *внутренних* точек множества Γ.

Область сходимости есть, следовательно, открытое множество. Оно может быть пустым: действительно, легко сконструировать пример, где множество Γ состоит только из начала координат.

Если применить настоящее определение к случаю одного переменного z, то легко видеть, что область сходимости есть не что иное, как интервал $(0, \varrho)$, где ϱ обозначает радиус сходимости степенного ряда.

Предложение 2.1. *Для того чтобы точка (r_1, r_2) принадлежала Δ, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа $r_1' > r_1$ и $r_2' > r_2$, такие, что $(r_1', r_2') \in \Gamma$.*

Условие необходимо, поскольку ряд $\sum\limits_{p,q} |a_{p,q}| r_1'^p r_2'^q$ должен сходиться в каждой точке некоторой окрестности точки (r_1, r_2). Оно достаточно, так как множество Γ содержит все точки (ϱ_1, ϱ_2), для которых $\varrho_1 \leqslant r_1'$, $\varrho_2 \leqslant r_2'$, и, следовательно, точка (r_1, r_2) — внутренняя точка Γ.

В частности, для того чтобы область сходимости Δ была непуста, необходимо и достаточно, чтобы существовала по крайней мере одна пара положительных чисел (r_1, r_2), такая, что

$$\sum_{p,q} |a_{p,q}| r_1^p r_2^q < +\infty.$$

Предложение 2.2. *Если точка (r_1, r_2) принадлежит области сходимости, то ряд $S(z_1, z_2)$ нормально сходится при $|z_1| \leqslant r_1$, $|z_2| \leqslant r_2$. Если точка $(|z_1|, |z_2|)$ не принадлежит замыканию Γ, ряд $S(z_1, z_2)$ расходится.*

В основе доказательства лежит, как и в случае одного переменного, следующая лемма Абеля.

Лемма. *Если $|a_{p,q}| r_1'^p r_2'^q \leqslant M$ (где M не зависит от p и q) и если $r_1 < r_1'$, $r_2 < r_2'$, то ряд $\sum\limits_{p,q} a_{p,q} z_1^p z_2^q$ сходится нормально при $|z_1| \leqslant r_1$, $|z_2| \leqslant r_2$.*

Эта лемма легко доказывается путем мажорирования абсолютных величин членов ряда членами двойной геометрической прогрессии.

Вывести предложение 2.2 из леммы Абеля предоставляется читателю.

3. Операции над сходящимися степенными рядами.

Предложение 3.1 (сложение и умножение степенных рядов). *Пусть открытое множество D содержится в области сходимости ряда $A(X, Y)$ и ряда $B(X, Y)$. Тогда D содержится в области сходимости каждого из рядов*

$$S(X, Y) = A(X, Y) + B(X, Y),$$

$$P(X, Y) = A(X, Y) \cdot B(X, Y).$$

Более того, если точка $(|z_1|, |z_2|) \in D$, *то*

$$S(z_1, z_2) = A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2),$$
$$P(z_1, z_2) = A(z_1, z_2) \cdot B(z_1, z_2).$$

Доказательство такое же, как и в случае рядов с одним переменным.

Очевидным образом можно определить частные производные степенного ряда $S(X, Y) = \sum_{p, q} a_{p, q} X^p Y^q$:

$$\frac{\partial S}{\partial X} = \sum_{p, q} p a_{p, q} X^{p-1} Y^q,$$
$$\frac{\partial S}{\partial Y} = \sum_{p, q} q a_{p, q} X^p Y^{q-1}.$$

Предложение 3.2. *Ряд* $\frac{\partial S}{\partial X}$ *имеет ту же самую область сходимости, что и ряд* S. *Если точка* $(|z_1|, |z_2|)$ *лежит в этой области, то функция* $\frac{\partial S}{\partial X}(z_1, z_2)$ *является частной производной (относительно действительного или комплексного переменного* z_1) *функции* $S(z_1, z_2)$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 7.1 § 2 гл. I.

Путем последовательного дифференцирования доказывается формула

$$a_{p, q} = \frac{1}{p!\, q!} \frac{\partial^{p+q} S(0, 0)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}. \tag{3.1}$$

§ 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Мы будем рассматривать здесь функции многих переменных, действительных или комплексных, определенные на открытом множестве. Для простоты все рассуждения проводятся для случая функций двух переменных.

1. Функции, разложимые в степенной ряд.

Определение. Мы скажем, что функция $f(x, y)$, определенная в окрестности точки (x_0, y_0), *разлагается в степенной ряд* в точке (x_0, y_0), если существует формальный степенной ряд $S(X, Y)$, имеющий непустую область сходимости, такой, что

$$f(x, y) = S(x - x_0, y - y_0)$$

при достаточно малых $|x - x_0|$ и $|y - y_0|$. Степенной ряд S, если он существует, определяется *однозначно* вследствие формулы (3.1) § 1.

Рассуждая как в § 4 гл. I, можно установить следующие свойства: если функция $f(x, y)$ разлагается в степенной ряд в точке (x_0, y_0), то она бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки . Произведение fg двух таких функций f и g также разложимо в степенной ряд в точке (x_0, y_0). Если это произведение тождественно равно нулю в окрестности точки (x_0, y_0), то хотя бы одна из функций f и g тождественно равна нулю в окрестности этой точки.

2. Аналитические функции. Операции над этими функциями.

Определение. Функция $f(x,y)$ действительных или комплексных переменных, определенная в области D, называется *аналитической* в этой области, если для каждой точки $(x_0, y_0) \in D$ функция $f(x, y)$ разлагается в степенной ряд в точке (x_0, y_0).

Мы здесь приведем без доказательста следующие свойства: аналитические функции в области D образуют кольцо, даже алгебру.

Если функция $f(x, y)$ аналитична в области D, то функция $1/f(x, y)$ аналитична в каждой точке области D, где $f(x, y) \neq 0$.

Всякая функция, аналитическая в области D, бесконечно дифференцируема, и ее производные являются аналитическими функциями в D. Композиция аналитических функций аналитична: точнее, если $f(x, y, z)$ — аналитическая функция в области D и если $g_1(u, v)$, $g_2(u, v)$, $g_3(u, v)$ — аналитические функции в области D', которые принимают значения в области D, то композиция $f(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$ является аналитической функцией в D'.

Предложение 2.1. *Сумма степенного ряда с несколькими переменными является аналитической функцией этих переменных в области сходимости.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.1 гл. I, § 4. Читатель может самостоятельно сформулировать предложение, аналогичное предложению 2.2 того же параграфа.

3. Принцип аналитического продолжения.

Теорема. *Пусть $f(x, y)$ — функция, аналитическая в области D, и пусть $(x_0, y_0) \in D$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *функция f и все ее производные обращаются в нуль в точке (x_0, y_0);*

б) *функция f тождественно равна нулю в окрестности точки (x_0, y_0);*

в) *функция f тождественно равна нулю в области D.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы из п. 3 § 4 гл. I.

Следствие 1. *Кольцо аналитических функций в области D представляет собой область целостности.*

Следствие 2 (принцип аналитического продолжения). *Если функции f и g, аналитические в области D, совпадают в окрестности некоторой точки области D, то они совпадают во всей области D.*

§ 3. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Определение гармонических функций.

Определение. Функция $f(x, y)$ двух действительных переменных x и y, определенная в области D, называется *гармонической* в этой области, если она дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{1.1}$$

Дифференциальный оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ называется оператором Лапласа. Он часто обозначается символом Δ.

Можно определить таким же образом гармонические функции произвольного конечного числа переменных, однако то, что будет здесь изложено, применимо только к случаю двух переменных.

Мы определим операции дифференцирования $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ по комплексному переменному $z = x + iy$ и сопряженному переменному $\bar{z} = x - iy$ (см. гл. II, § 2, п. 3). Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \, \partial \bar{z}} . \tag{1.2}$$

Поэтому условие (1.1) эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial \bar{z}} = 0. \tag{1.3}$$

Соотношение (1.3) выражает, следовательно, тот факт, что функция f гармонична.

Замечание. Рассмотренная функция f может принимать как комплексные, так и действительные значения. Чтобы комплекснозначная функция $f = P + iQ$ (P и Q — действительные) была гармонической, необходимо и достаточно, вследствие (1.1), чтобы функции P и Q были гармоническими. Мы будем употреблять в дальнейшем для функции P обозначение $\operatorname{Re} f$, а для Q—обозначение $\operatorname{Im} f$.

2. Функции гармонические и функции голоморфные.

Предложение 2.1. *Всякая голоморфная функция является гармонической.*

В самом деле, всякая голоморфная функция f бесконечно дифференцируема и, кроме того, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Применяя дифференцирование $\frac{\partial}{\partial z}$, получаем соотношение (1.3).

Следствие. *Действительная и мнимая части голоморфной функции являются гармоническими функциями.*

Например, $\log |z|$ — гармоническая функция в плоскости с выколотым началом координат. В самом деле, в окрестности любой точки $z \neq 0$ можно выбрать некоторую непрерывную ветвь функции $\log z$; функция $\log |z|$ является действительной частью этой ветви.

Предложение 2.2. *Всякая действительная функция $g(x, y)$, гармоническая в области D, в окрестности каждой точки этой области является действительной частью функции f, голоморфной в окрестности этой точки. Функция f определена с точностью до постоянной.*

Доказательство. Так как g — гармоническая функция, то $\frac{\partial^2 g}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0$ и, следовательно, функция $\frac{\partial g}{\partial z}$ голоморфна в D. Поэтому дифференциальная форма $2\frac{\partial g}{\partial z}dz$ *локально* обладает примитивной f. Иначе говоря, в окрестности каждой точки области D существует функция f, определенная с точностью до постоянной, такая, что

$$df = 2\frac{\partial g}{\partial z}dz. \tag{2.1}$$

Это соотношение доказывает, что функция f голоморфна.

Переходя к комплексно сопряженным величинам в соотношении (2.1), получим

$$d\bar{f} = 2\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}d\bar{z}.$$

Так как функция g *действительна*, функции $\frac{\partial g}{\partial z}$ и $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ комплексно сопряженны. Складывая (2.1) и (2.2), получаем

$$\frac{1}{2}d(f+\bar{f}) = dg.$$

Следовательно, функция g равна действительной части функции f, возможно, увеличенной на некоторую действительную постоянную.

Осталось показать, что если две функции f_1 и f_2, голоморфные в окрестности одной и той же точки, имеют одинаковые действительные части, то их разность $f = f_1 - f_2$ постоянна. Действительно, $d(f+\bar{f})=0$, или, иначе говоря,

$$\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = 0.$$

Отсюда получаем, что $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если дана действительная функция g, гармоническая в области D, то не всегда существует функция f, голоморфная во всей области D, действительная часть которой равна g. Например, если D — плоскость с выколотым началом координат, то функция $\log|z|$ не является действительной частью функции, голоморфной в области D, поскольку в этой области логарифм не обладает однозначной ветвью. Предложение 2.2 утверждает только, что всякая действительная функция *локально* является действительной частью голоморфной функции. Однако справедливо

Следствие. *Если D — односвязная область, то всякая действительная функция g, гармоническая в области D, является действительной частью функции f, голоморфной в D.*

В самом деле, дифференциальная форма $2\frac{\partial g}{\partial z}dz$ имеет примитивную в области D (см. гл. II, § 1, п. 7, теорема 3).

3. Теорема о среднем. Как было показано в п. 1 § 2 гл. III, для голоморфных в области D функций справедлива теорема о среднем: для каждого замкнутого круга, содержащегося в D, значение функции f в центре круга равно среднему значений функции f на границе этого круга.

Предложение 3.1. *Для гармонических функций в области D справедлива теорема о среднем.*

Достаточно доказать это предложение для гармонических функций, принимающих действительные значения. Случай гармонических комплекснозначных функций сведется к этому, если рассмотреть отдельно действительную и мнимую части.

Итак, пусть g — действительная гармоническая функция в области D, а S — замкнутый круг, содержащийся в D. В силу следствия предложения 2.2, существует функция f, голоморфная в окрестности круга S, действительная часть которой равна g. Значение функции f в центре круга S равно среднему функции f на границе круга. Приравнивая действительные части, видим, что значение функции g

в центре круга S равно среднему значению на границе, что и требовалось.

Как мы увидим далее (§ 4, п. 5), верно и обратное: всякая непрерывная функция, для которой справедлива теорема о среднем, является гармонической. Иначе говоря, теорема о среднем могла бы быть взята в качестве определения гармонических функций.

В гл. III, § 2, п. 2, был доказан *принцип максимума* для любой непрерывной функции (принимающей действительные или комплексные значения), для которой справедлива теорема о среднем. Следовательно, принцип максимума применим к гармоническим функциям.

4. Аналитичность гармонических функций.

Предложение 4.1. *Всякая функция $g(x, y)$, гармоническая в области D плоскости, является аналитической функцией переменных x и y в D. В частности, всякая гармоническая функция бесконечно дифференцируема.*

Доказательство. Можно предположить, что функция g принимает действительные значения. Поскольку предложение имеет локальный характер (нужно показать, что функция g аналитична в окрестности каждой точки области D), мы предположим, что функция $g(x, y)$ гармонична в открытом круге $x^2 + y^2 < \varrho^2$. В этом круге функция g является действительной частью голоморфной функции f. Функция f разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n. \tag{4.1}$$

Заменим в этом ряде переменную z на $x + iy$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n (x+iy)^n \tag{4.2}$$

как степенной ряд с двумя переменными x и y, имея в виду, что $(x + iy)^n$ в выражении (4.2) заменяется по формуле

$$(x+iy)^n = \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!\,q!} x^p (iy)^q. \tag{4.3}$$

Для всякой точки (x, y), для которой $|x| + |y| < \varrho$, $(|x|, |y|)$ принадлежит *области сходимости* ряда с двумя переменными (4.2). В самом деле, для такой точки (x, y) существуют числа $r_1 > |x|$ и $r_2 > |y|$, такие, что

$$r_1 + r_2 = r < \varrho,$$

и при этом

$$\sum_{p\geqslant 0,\, q\geqslant 0} \frac{(p+q)!}{p!q!} |a_{p+q}| r_1^p r_2^q = \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n < +\infty.$$

В частности, сумма ряда (4.2) есть *аналитическая* функция в произведении кругов

$$|x| < \frac{\varrho}{2}, \quad |y| < \frac{\varrho}{2}. \tag{4.4}$$

Пусть $\bar{f}(z) = \sum_{n\geqslant 0} \bar{a}_n z^n$ — сумма степенного ряда, коэффициенты которого $\bar{a}_n$ комплексно сопряжены с коэффициентами ряда $f(z)$. Тогда

$$2g(x, y) = f(x+iy) + \bar{f}(x-iy). \tag{4.5}$$

Функция $\bar{f}(x-iy)$ аналитична в области (4.4) по тем же причинам, что и функция $f(x+iy)$. Следовательно, $g(x, y)$ — аналитическая функция в этой области. Таким образом, функция g аналитична в окрестности центра всякого открытого круга, в котором она гармонична. Отсюда следует предложение 4.1.

5. Отыскание голоморфной функции по заданной действительной части. Как мы уже видели (предложение 2.2), всякую действительную гармоническую функцию g локально можно представить как действительную часть голоморфной функции f, которая находится путем интегрирования. Мы увидим сейчас, что если аналитическая функция задана при помощи степенного ряда, можно найти функцию f без интегрирования.

Предположим, что функция $g(x, y)$ гармонична в открытом круге $x^2+y^2<\varrho^2$, и воспользуемся обозначениями п. 4.

Рассмотрим формальные степенные ряды с двумя переменными X и Y:

$$f(X+iY) = \sum_{n\geqslant 0} a_n (X+iY)^n, \quad \bar{f}(X-iY) = \sum_{n\geqslant 0} \bar{a}_n (X-iY)^n.$$

Как мы уже видели, их область сходимости содержит открытое множество (4.4). Подставим теперь вместо X и Y *комплексные* переменные x и y, удовлетворяющие неравенствам (4.4). Получим абсолютно сходящийся ряд.

Пусть z — комплексное число, для которого $|z|<\varrho$. Вследствие (4.5) имеем

$$2g\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)=f(z)+\bar{f}(0). \tag{5.1}$$

Полагая в этом соотношении $z=0$, получим, что

$$2g(0, 0)=f(0)+\bar{f}(0).$$

Вычитая эти равенства одно из другого, приходим к окончательной формуле:

$$2g\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)-g(0, 0)=f(z)+\frac{1}{2}(\bar{f}(0)-f(0)). \tag{5.2}$$

Искомая функция $f(z)$ *равна, следовательно, с точностью до чисто мнимой постоянной, известной функции*

$$2g\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)-g(0, 0), \tag{5.3}$$

полученной при помощи подстановки комплексных переменных в разложение в двойной степенной ряд функции $g(x, y)$, *зависящей от двух действительных переменных.*

Замечание. Выше мы считали, что функция $g(x, y)$ *гармонична* в круге $x^2+y^2<\varrho^2$. Но соотношение (5.2) сохраняет смысл и для любой действительной аналитической функции $g(x, y)$, разложимой в степенной ряд в области (4.4). Функция $f(z)$, определяемая функцией $g(x, y)$, разложима в степенной ряд при $|z|<\varrho$, а следовательно, голоморфна в этом круге. Однако в этом случае функция g может и не являться действительной частью выражения (5.3). В качестве упражнения можно показать следующее: для того чтобы функция g была действительной частью функции (5.3), необходимо и достаточно, чтобы функция g была гармонической.

Пример. Рассмотрим функцию

$$g(x, y)=\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y}.$$

Имеем

$$2g\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = \frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}} = \operatorname{tg} z,$$

и, следовательно,

$$f(z) = \operatorname{tg} z.$$

Можно проверить, что функция g в самом деле является действительной частью функции $\operatorname{tg} z$. Поэтому данная функция g гармоническая.

§ 4. ФОРМУЛА ПУАССОНА. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

1. Интегральное представление функции, гармонической в круге. Пусть $g(x, y)$ — действительная функция, гармоническая в круге $x^2 + y^2 < \varrho^2$. Функция g является действительной частью голоморфной функции

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n. \tag{1.1}$$

Можно считать, что a_0 — действительное число, тогда функция f определена однозначно. При $r < \varrho$ имеем

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n \geqslant 1} r^n (a_n e^{in\theta} + \bar{a}_n e^{-in\theta}). \tag{1.2}$$

Этот ряд сходится нормально относительно θ, которое меняется от 0 до 2π. Мы получили в правой части равенства (1.2) ряд Фурье, коэффициенты которого задаются интегральными формулами

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta, \tag{1.3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(r\cos\theta, r\sin\theta)}{(re^{i\theta})^n}\, d\theta \text{ при } n \geqslant 1. \tag{1.4}$$

Заменим в правой части (1.1) коэффициенты a_n их значениями, взятыми из (1.3) и (1.4). Получим при $|z|<r$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\left[1+2\sum_{n\geq 1}\left(\frac{z}{re^{i\theta}}\right)^n\right]d\theta, \quad (1.5)$$

так как, в силу нормальной сходимости ряда, можно менять порядок суммирования и интегрирования. Поскольку

$$1+2\sum_{n\geq 1}\left(\frac{z}{re^{i\theta}}\right)^n=\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z},$$

получим окончательную формулу

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\,d\theta, \quad (1.6)$$

справедливую при $|z|<r$.

Эта интегральная формула выражает голоморфную функцию в круге $|z|<\varrho$ через ее действительную часть на границе этого круга.

Возьмем действительную часть обеих частей равенства (1.6.). Получим

$$g(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,d\theta, \quad (1.7)$$

где $z=x+iy$.

Эта формула справедлива в открытом круге $x^2+y^2<r^2$ для любой действительной функции g, гармонической в круге $x^2+y^2<\varrho^2$ (где $r<\varrho$). В действительности формула (1.7) остается справедливой и для *комплекснозначной* гармонической функции g, что легко проверить, разделяя действительную и мнимую части функции g. Соотношение (1.7) называется *формулой Пуассона*, а функция $\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}$, стоящая под знаком интеграла, называется *ядром Пуассона*.

2. Свойства ядра Пуассона. Пусть r и θ фиксированы, тогда ядро Пуассона является функцией переменного $z=x+iy$, определенной и гармонической в каждой точке, кроме точки $z=re^{i\theta}$. Гармоничность этой функции следует из того, что она является действительной частью голоморфной функции $\dfrac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}$. Ядро Пауассона обращается в нуль в каждой точке окружности $|z|=r$ кроме точки $z=re^{i\theta}$. Оно положительно в открытом круге $|z|<r$.

Фиксируем теперь r и z, где $|z|<r$. Тогда ядро Пуассона является периодической функцией θ, принимающей строго положительные значения. Рассмотрим эту функцию переменного θ как плотность распределения положительной массы на единичной окружности. Тогда общая масса равна $+1$, в силу соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,d\theta=1, \tag{2.1}$$

которое получается из (1.7), если положить функцию g тождественно равной 1 (постоянная является гармонической функцией).

3. Задача Дирихле для круга. Задача Дирихле состоит в следующем: на окружности с центром 0 и радиуса r задана непрерывная функция при помощи непрерывной функции $f(\theta)$, периодической с периодом 2π. Требуется найти функцию $F(z)$ комплексного переменного z, определенную и непрерывную в замкнутом круге $|z|\leqslant r$, гармоническую в открытом круге $|z|<r$ и удовлетворяющую равенству

$$F(re^{i\theta})=f(\theta).$$

Иными словами, речь идет о продолжении непрерывной функции, заданной на окружности, до функции, непрерывной в замкнутом круге и гармонической в открытом круге.

Мы будем рассматривать только случай, когда данная функция f и неизвестная функция F принимают действительные значения. Случай комплекснозначных функций сводится к нему разделением действительной и мнимой частей.

Теорема. *Задача Дирихле для круга всегда имеет решение и притом единственное.*

Докажем сначала *единственность* решения, если оно существует. Если F_1 и F_2 — два решения задачи Дирихле, то разность $F_1 - F_2 = G$ непрерывна в замкнутом круге, гармонична в открытом круге и обращается в нуль на границе круга. Достаточно, следовательно, доказать такую лемму.

Лемма. *Функция G, определенная и непрерывная в замкнутом круге, гармоническая в открытом круге и обращающаяся в нуль на границе круга, тождественно равна нулю.*

Действительно, поскольку замкнутый круг компактен, функция G достигает верхней грани M в некоторой точке замкнутого круга. Если $M > 0$, то эта точка лежит внутри круга. Согласно принципу максимума (см. гл. III, § 2), функция G постоянна и равна M в открытом круге, а следовательно, по непрерывности, и в замкнутом круге. Это противоречит условию, что функция G обращается в нуль на границе. Из тех же соображений доказывается, что нижняя грань функции G в замкнутом круге равна нулю.

Существование решения задачи Дирихле будет установлено в следующем пункте.

4. Решение задачи Дирихле. Пусть $|z|<r$; положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}\,d\theta. \tag{4.1}$$

Покажем, что определенная таким образом функция F гармонична и что

$$f(\theta_0) = \lim_{\substack{z \to re^{i\theta_0} \\ |z|<r}} F(z). \tag{4.2}$$

Следовательно, функция F, продолженная на границу круга при помощи функции f, является решением задачи Дирихле, и доказательство теоремы из п. 3 будет завершено.

Функция F, определенная внутри круга соотношением (4.1), очевидно, является действительной частью функции

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z}\,d\theta$$

переменного z, которая голоморфна в открытом круге, поскольку можно дифференцировать под знаком интеграла. Следовательно, функция F действительно является гармонической в открытом круге.

Осталось доказать соотношение (4.2). Вот идея этого доказательства: ядро Пуассона определяет распределение положительной единичной массы, которое зависит от внутренней точки z круга радиуса r. Покажем, что когда z стремится к точке $re^{i\theta_0}$, это распределение массы стремится к следующему распределению: масса $+1$ помещена в точку $re^{i\theta_0}$. Точнее, если задана дуга $|\theta-\theta_0|\leqslant\eta$ окружности радиуса r, содержащая точку $re^{i\theta_0}$, то общая масса, *расположенная на этой дуге*, стремится к 1, когда точка z стремится к $re^{i\theta_0}$. Достаточно показать, что общая масса, расположенная на дополнительной дуге, стремится к нулю, когда z стремится к точке $re^{i\theta_0}$, оставаясь внутри круга.

Мы хотим, следовательно, доказать лемму.

Лемма. *Интеграл*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\theta_0|>\eta}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,d\theta \tag{4.3}$$

стремится к нулю, когда z стремится к $re^{i\theta_0}$, оставаясь по модулю меньше r.

Доказательство леммы. Положим $z=\varrho e^{i\alpha}$. Если $|\alpha-\theta_0|\leqslant\eta/2$, то

$$|\alpha-\theta|\geqslant\frac{\eta}{2}$$

для любого θ, удовлетворяющего неравенству $|\theta-\theta_0|>\eta$. Следовательно, под знаком интеграла имеем

$$|re^{i\theta}-z|\geqslant r\sin\frac{\eta}{2}.$$

Поэтому интеграл (4.3) мажорируется интегралом от функции $\frac{1}{r^2\sin^2\eta/2}(r^2-\varrho^2)$, который стремится к нулю, когда ϱ стремится к r.

Теперь, когда лемма доказана, мы можем вывести соотношение (4.2). Используя (2.1), получаем

$$F(z)-f(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\theta_0|\leqslant\eta}(f(\theta)-f(\theta_0))\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,d\theta+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\theta_0|>\eta}(f(\theta)-f(\theta_0))\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\,d\theta. \qquad (4.4)$$

Пусть дано $\varepsilon>0$. Абсолютная величина первого интеграла правой части равенства (4.4) меньше верхней грани $|f(\theta)-f(\theta_0)|$ при $|\theta-\theta_0|\leqslant\eta$, поскольку общая масса на всей окружности равна 1.

Так как f — непрерывная функция, можно выбрать η так, чтобы абсолютная величина первого интеграла не превосходила $\frac{\varepsilon}{2}$. При выбранном значении η второй интеграл правой части (4.2) меньше $2Mm$, где M — верхняя грань $|f(\theta)|$, а m — значение интеграла (4.3).

Вследствие предыдущей леммы, m стремится к нулю, когда z стремится к $re^{i\theta_0}$. Следовательно, когда z принадлежит достаточно малой окрестности точки $re^{i\theta_0}$, абсолютная величина второго интеграла меньше или равна $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$|F(z)-f(\theta_0)|\leqslant\varepsilon,$$

откуда следует (4.2). Теорема из п. 3 тем самым полностью доказана. Функция (4.1) является решением задачи Дирихле.

5. Определение гармонических функций при помощи теоремы о среднем. Мы видели (§ 3, п. 3), что для любой гармонической функции справедлива теорема о среднем. Верно и обратное.

Теорема. *Всякая непрерывная в области D функция f, для которой справедлива теорема о среднем, является гармонической в этой области.*

Доказательство. Достаточно показать, что функция f гармонична в окрестности каждой точки области D. Мы покажем, что для любого замкнутого круга K, содержащегося в D, функция f гармонична внутри K. Рассмотрим сужение функции f на границу круга K. Вследствие теоремы из п. 3 существует функция F, непрерывная в круге K и гармоническая внутри K, которая совпадает с функцией f на границе K. Разность $F - f$ обращается в нуль на границе круга K и удовлетворяет принципу максимума внутри K, поскольку для нее справедлива теорема о среднем. Вследствие принципа максимума (ср. лемму п. 3) функция $F - f$ тождественно равна нулю в круге K. Отсюда следует, что функция f совпадает внутри круга K с гармонической функцией F, и, следовательно, сама является гармонической в этом круге.

§ 5. ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Определение голоморфной функции. Рассмотрим n комплексных переменных $z_k = x_k + iy_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Из тех же соображений, что и в гл. II, § 2, п. 3, очевидно, что дифференциал непрерывно дифференцируемой функции f записывается в виде

$$df = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \right). \tag{1.1}$$

Фиксируем все переменные, кроме z_k. Тогда для того, чтобы функция f была голоморфной функцией переменного z_k, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0$. Таким образом, если f голоморфна по любому переменному z_k, то дифференциал df является линейной комбинацией дифференциалов dz_k.

Обратно, если дифференциал df является линейной комбинацией дифференциалов dz_k, то функция f голоморфна по каждому переменному z_k в отдельности.

Определение. Функция $f(z_1, \ldots, z_n)$ от n переменных z_k, определенная в области D пространства $\mathbf{C}^n$, называется *голоморфной* в области D, если она непрерывно дифференцируема и если, кроме того, ее дифференциал df

равен

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k.$$

Очевидно, что аналитическая функция комплексных переменных z_k голоморфна.

Т е о р е м а. *Непрерывная функция в области D, голоморфная по каждому из своих переменных в отдельности, голоморфна и аналитична в области D.*

Доказательству этой теоремы посвящены два следующих пункта. Из этой теоремы следует, в частности, что каждая непрерывная функция, голоморфная отдельно по каждому из переменных z_k, непрерывно дифференцируема и даже бесконечно дифференцируема. Из нее следует, с другой стороны, эквивалентность свойств голоморфности и аналитичности для функций нескольких комплексных переменных.

2. Интегральная формула Коши. Рассмотрим сначала случай двух комплексных переменных z_1 и z_2.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Если функция $f(z_1, z_2)$ непрерывна в произведении кругов*

$$|z_1| < \varrho_1, \quad |z_2| < \varrho_2 \tag{2.1}$$

и голоморфна по каждому из переменных z_1 и z_2 в отдельности в области (2.1), *то при*

$$|z_k| < r_k < \varrho_k \qquad (k = 1,\ 2)$$

имеет место равенство

$$f(z_1,\ z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\int \frac{f(\zeta_1,\ \zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}, \tag{2.2}$$

где интеграл берется по произведению окружностей $|\zeta_1| = r_1$ и $|\zeta_2| = r_2$, каждая из которых пробегается в положительном направлении.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем z_2 в открытом круге $|z_2| < r_2$. Функция $f(z_1, z_2)$ голоморфна по z_1 в круге $|z_1| < \varrho_1$. Следовательно, можно применить к ней интегральную формулу Коши (гл. II, § 2, п. 5):

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \quad \text{при} \quad |z| < r_1. \qquad (2.3)$$

Фиксируем теперь ζ_1 на окружности $|\zeta_1| = r_1$. Функция $f(\zeta_1, z_2)$ голоморфна по z_2 при $|z_2| < \varrho_2$. Так же, как и выше, получаем равенство

$$f(\zeta_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\zeta_2 \quad \text{при} \quad |z_2| < r_2. \qquad (2.4)$$

Заменим в (2.3) функцию $f(\zeta_1, z_2)$ под знаком интеграла ее выражением по формуле (2.4). Так как функция $f(\zeta_1, \zeta_2)$ непрерывна, получаем формулу (2.2).

Замечание (принадлежащее Гартогсу). Пусть функция $f(z_1, z_2)$ определена и непрерывна в объединении областей

(А) $\qquad |z_1| < \varrho_1, \quad |z_2| < \varepsilon,$

(Б) $\qquad \varrho_1 - \varepsilon < |z_1| < \varrho_1, \quad |z_2| < \varrho_2,$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Предположим, что в области (А) функция f голоморфна по переменной z_1, а в области (Б) — по переменной z_2. Тогда функция f продолжается до голоморфной функции переменных z_1 и z_2 в области (2.1), и это продолжение удовлетворяет интегральной формуле (2.2).

Указания к доказательству. Выберем произвольно r_1 и r_2, удовлетворяющие неравенствам $r_1 < \varrho_1$, $r_2 < \varrho_2$, и пусть ε настолько мало, что $\varepsilon < r_2$, $r_1 > \varrho_1 - \varepsilon$. Покажем, что функция $f(z_1, z_2)$ продолжается до функции, которая голоморфна в области

$$|z_1| < r_1, \quad |z_2| < r_2 \qquad (2.5)$$

(ее мы также будем обозначать через $f(z_1, z_2)$) и которая в этой области удовлетворяет соотношению (2.2). Прежде всего, соотношение (2.3) имеет место при $|z_1| < r_1$, $|z_2| < \varepsilon$, поскольку функция f голоморфна по z_1 в области (А). Далее, если $|\zeta_1| = r_1$, то соотношение (2.4) имеет место при $|z_2| < r_2$, поскольку функция f голоморфна по z_2 в области (Б). Следовательно, соотношение (2.2) справедливо при $|z_1| < r_1$, $|z_2| < \varepsilon$. Однако правая часть соотношения (2.2) является голоморфной функцией переменных z_1 и z_2 в области (2.5). Ее продолжение удовлетворяет соотношению (2.2) в области (2.5), что и требуется.

Утверждение, аналогичное предложению 2.1, имеет место и для функций n комплексных переменных. В этом случае интегральную формулу (2.1) следует заменить равенством

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \ldots \int \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n)}.$$

3. Разложение голоморфной функции в степенной ряд.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *При тех же предположениях, что и в предложении* 2.1, *функция* f *в области* (2.1) *разлагается в двойной степенной ряд*

$$f(z_1, z_2) = \sum_{p,\, q \geq 0} a_{p,q} z_1^p z_2^q. \tag{3.1}$$

Доказательство совершенно аналогично проведенному для случая одного комплексного переменного (см. гл. II, § 2, п. 6, теорема 3).

Как уже известно, если разложение в степенной ряд существует, то оно *единственно*, так как совпадает с разложением Тейлора функции f в начале координат. Следовательно, для данных r_1' и r_2', таких, что

$$r_1' < \rho_1, \quad r_2' < \rho_2,$$

достаточно найти степенной ряд, нормально сходящийся к $f(z_1, z_2)$ в произведении кругов

$$|z_1| \leq r_1', \qquad |z_2| \leq r_2'.$$

Выберем r_1 и r_2 так, чтобы было $r_1' < r_1 < \rho_1$, $r_2' < r_2 < \rho_2$, и применим интегральную формулу (2.2) при $|z_1| < r_1'$, $|z_2| < r_2'$. Существует разложение

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \sum_{p,\, q \geq 0} \frac{z_1^p z_2^q}{\zeta_1^{p+1} \zeta_2^{q+1}}. \tag{3.2}$$

Последний ряд нормально сходится при $|z_i| \leq r_i'$, $|\zeta_i| = r_i$ $(i = 1, 2)$.

Под знаком интеграла в правой части (2.2) заменим функцию $\frac{1}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}$ ее разложением в степенной ряд по формуле (3.2). В силу нормальной сходимости ряда его можно интегрировать почленно. В результате получим разложение (3.1), в котором коэффициенты $a_{p,\,q}$ заданы интегральной формулой

$$a_{p,\,q}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\int\frac{f(\zeta_1,\,\zeta_2)}{\zeta_1^{p+1}\,\zeta_2^{q+1}}\,d\zeta_1\,d\zeta_2. \tag{3.3}$$

Предложение 3.1, таким образом, доказано.

Аналогичное предложение можно доказать для случая n комплексных переменных. Очевидно, что теорема, сформулированная в конце п. 1, следует из предложения 3.1.

Замечание. Можно доказать, что функция $f(z_1,\,\ldots,\,z_n)$, голоморфная по каждому из своих переменных в области D, оказывается *непрерывной* в этой области, а следовательно, голоморфной.

Доказательство этого утверждения слишком сложно и не будет приведено здесь.

4. Вычисление коэффициентов разложения Тейлора голоморфной функции. Как и в случае одного переменного, коэффициенты $a_{p,\,q}$ можно выразить через интеграл, содержащий функцию f. Для этого достаточно в соотношении (3.1) заменить z_1 на $r_1e^{i\theta_1}$, а z_2 на $r_2e^{i\theta_2}$ и проинтегрировать почленно. Получим

$$a_{p,\,q}\,r_1^p\,r_2^q=\frac{1}{4^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r_1e^{i\theta_1},\,r_2e^{i\theta_2})\,e^{-i\,(p\theta_1+q\theta_2)}\,d\theta_1\,d\theta_2. \tag{4.1}$$

Отсюда выводится неравенство Коши:

$$|a_{p,\,q}|\leqslant\frac{M(r_1,\,r_2)}{r_1^p\,r_2^q}\,, \tag{4.2}$$

где $M(r_1,\,r_2)$ — верхняя грань функции $|f(z_1,\,z_2)|$ при $|z_1|=r_1$, $|z_2|=r_2$ или, что то же самое, при $|z_1|\leqslant r_1$, $|z_2|\leqslant r_2$.

Читателю предоставляется самостоятельно вывести теорему, аналогичную теореме Лиувилля, и принцип максимума.

5. Композиция голоморфных функций.

Предложение 5.1. *Пусть $f(z_1, \ldots, z_n)$ — голоморфная функция в области D пространства $\mathbf{C}^n$. Пусть*

$$g_1, \ldots, g_n$$

— функции, голоморфные в области D' пространства $\mathbf{C}^p$ и принимающие значения в D. Тогда функция $f \circ g$, определенная следующим образом:

$$(t_1, \ldots, t_p) \to f(g_1(t_1, \ldots, t_p), \ldots, g_n(t_1, \ldots, t_p)),$$

голоморфна по $t_1, \ldots, t_p$ в области D'.

Доказательство. Можно применить метод подстановки в сходящиеся степенные ряды. Однако ввиду того, что мы подробно не изучали этого метода в случае многих переменных, мы дадим здесь доказательство, основанное на совершенно других соображениях.

Так как функция f, по предположению, голоморфна, то

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k. \tag{5.1}$$

Так как функции g_k голоморфны, то

$$dz_k = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g_k}{\partial t_j} dt_j. \tag{5.2}$$

Если мы подставим вместо дифференциалов dz_k в равенстве (5.1) их значения из (5.2), то получим дифференциал композиции $f \circ g$. Следовательно, дифференциал $d(f \circ g)$ является линейной комбинацией дифференциалов dt_j, т. е. функция $f \circ g$ голоморфна.

6. Теорема о неявной функции.

Предложение 6.1. *Пусть $f_j(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_p)$ $(j = 1, \ldots, n)$ — функции, голоморфные в окрестности точки $x_j = a_j$, $z_k = c_k$. Предположим, что функциональный определитель $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right)$ отличен от нуля в этой* *точке. Тогда система уравнений*

$$y_j = f_j(x_1, \ldots, x_n;\ z_1, \ldots, z_p) \quad (j = 1, \ldots, n) \qquad (6.1)$$

имеет при x_j, *достаточно близких к* a_j, *при* z_k, *достаточно близких к* c_k, *и при* y_j, *достаточно близких к*

$$b_j = f_j(a_1, \ldots, a_n;\ c_1, \ldots, c_p),$$

следующее решение:

$$x_j = g_j(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p), \qquad (6.2)$$

где функции g_j *голоморфны в окрестности точки*

$$(b_1, \ldots, b_n;\ c_1, \ldots, c_p).$$

Доказательство. Мы сведем это предложение к классической теореме о неявной функции действительных переменных. Положим

$$x_j = x_j' + ix_j'', \quad y_j = y_j' + iy_j'',$$

где x_j', x_j'', y_j' и y_j'' действительны. Внешнее произведение $dx_j \wedge d\bar{x}_j$ равно

$$(dx_j' + i\,dx_j'') \wedge (dx_j' - i\,dx_j'') = -2i\,dx_j' \wedge dx_j''.$$

Таким образом,

$$dx_j \wedge d\bar{x}_j = -2i\,dx_j' \wedge dx_j'',$$

$$\text{а также } dy_j \wedge d\bar{y}_j = -2i\,dy_j' \wedge dy_j''. \qquad (6.3)$$

С другой стороны, при фиксированных $z_1, \ldots, z_p$ имеем соотношения

$$dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n = \det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{j'}}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

$$d\bar{y}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{y}_n = \det\left(\frac{\partial \bar{f}_j}{\partial \bar{x}_{j'}}\right) d\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{x}_n,$$

откуда, после умножения,

$$dy_1 \wedge d\bar{y}_1 \wedge \ldots \wedge dy_n \wedge d\bar{y}_n =$$
$$= \left|\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{j'}}\right)\right|^2 dx_1 \wedge d\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge d\bar{x}_n.$$

Это означает, ввиду (6.3), что функциональный определитель y_1', y_1'', $\ldots$, y_n', y_n'' по x_1', x_1'', $\ldots$, x_n', x_n'' равен

$$\left|\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{j'}}\right)\right|^2$$

и отличен от нуля в точке $(a_1, \ldots, a_n; c_1, \ldots, c_p)$ по предположению.

Применим теорему о неявных функциях: $x'_1, x''_1, \ldots, x''_n$ локально представляются как непрерывно дифференцируемые функции переменных $y'_1, y''_1, \ldots, y''_n$ и действительных и мнимых частей переменных $z_1, \ldots, z_p$. Однако система равенств

$$dy_j = \sum_{j'} \frac{\partial f_j}{\partial x_{j'}} dx_{j'} + \sum_k \frac{\partial f_j}{\partial z_k} dz_k$$

показывает, что дифференциалы $dx_{j'}$ являются линейными комбинациями дифференциалов dy_j и dz_k. Следовательно, $x_1, \ldots, x_n$ — *голоморфные* функции переменных y_i и z_k, что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что для голоморфной функции $f(z)$ в области D

(I) $$\Delta |f(z)|^2 = 4 |f'(z)|^2,$$

(II) $$\Delta \log (1 + |f(z)|^2) = 4 |f'(z)|^2/(1 + |f(z)|^2)^2$$

для любой точки $z \in D$. Здесь Δ — оператор Лапласа, определенный в § 3, п. 1.

2.(1) Пусть $g(z)$ — голоморфная функция в круге $|z| < R$. Показать, что если $0 \leqslant r < R$ и функция $g(z)$ не обращается в нуль в замкнутом круге $|z| \leqslant r$, то справедливо соотношение

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| \, d\theta.$$

(2) Показать, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \log |re^{i\theta} - re^{it}| \, d\theta$$

сходится и равен $2\pi \log r$ (r, t действительны, $r > 0$).

Вывести отсюда, что если $f(z)$ — мероморфная функция в круге $|z| < R$ и если $0 < r < R$, то интеграл $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$ сходится.

(3) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — нули, а $b_1, b_2, \ldots, b_q$ — полюсы функции $f(z)$, рассмотренной в (2), содержащиеся в круге с выколотым центром $0 < |z| \leqslant r$ (каждый из них учитывается столько раз, какова его кратность), и пусть

$$f(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots$$

— разложение Лорана функции f в начале координат (здесь $n \gtreqless 0$ — целое). Показать, что тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \log|c_n| - \sum_{j=1}^{p} \log|a_j| + \\ + \sum_{k=1}^{q} \log|b_k| + (n + p - q)\log r.$$

(Рассмотреть функцию

$$g(z) = f(z)\left(\frac{r}{z}\right)^n \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} \frac{r^2 - \bar{a}_j z}{r(z - a_j)} \prod_{1 \leqslant k \leqslant p} \frac{r(z - b_k)}{r^2 - \bar{b}_k z}$$

и показать, что она голоморфна и не обращается в нуль в области, содержащей замкнутый круг $|z| \leqslant r$, и что $|g(z)| = |f(z)|$ при $|z| = r$.)

3. Все гармонические функции, рассматриваемые в этом упражнении, предполагаются действительнозначными.

(1) Пусть $f(z)$ — гармоническая функция в круге $|z| < R$ и $f(z) \geqslant 0$ всюду в этом круге. Показать, что тогда выполняются неравенства

$$\frac{R - |z|}{R + |z|} f(0) \leqslant f(z) \leqslant \frac{R - |z|}{R + |z|} f(0)$$

для любого z, для которого $|z| < R$. [Использовать формулу Пуассона и заметить, что ядро Пуассона удовлетворяет неравенствам

$$\frac{r - |z|}{r + |z|} \leqslant \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \leqslant \frac{r + |z|}{r - |z|} \quad (\text{при } |z| < r).\ ]$$

(2) Вывести отсюда, что если функция $f(z)$ гармонична и положительна в круге $D(a, r)$ с центром a и радиусом r, то

$$\frac{1}{3} f(a) \leqslant f(z) \leqslant 3f(a)$$

для любого z из круга $D(a, r/2)$.

(3) Пусть функция $f(z)$ гармонична и положительна в области D плоскости $\mathbf{C}$, и пусть K — компакт, содержащийся в D. Показать, что существует постоянная M, зависящая только от D и K, такая, что

$$f(z_1) \leqslant Mf(z_2)$$

для любой пары z_1 и z_2 из компакта K. (Показать, что существует конечное число замкнутых кругов D_n, удовлетворяющих условию

$$D \supset \bigcup_n D_n \supset K,$$

и для любых двух из них, скажем D_p и D_q, существует последовательность $D_{n_1}, \ldots, D_{n_k}$, такая, что $D_{n_1} = D_p$, $D_{n_k} = D_q$ и $D_{n_{j-1}} \cap D_{n_j} \neq \varnothing$ для $j = 2, 3, \ldots, k$. Применить (2) к каждому из этих кругов.)

(4) Пусть $\{f_n(z)\}$ — последовательность монотонно неубывающих гармонических функций в области D:

$$f_n(z) \leqslant f_{n+1}(z) \text{ для любого } z \in D, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Показать, что если существует точка $a \in D$, такая, что $\sup_n |f_n(a)| < \infty$, то последовательность $f_n(z)$ сходится равномерно на любом компакте в области D к гармонической функции. [Заметить эквивалентность сходимости последовательности $f_n(z)$ и ряда $\sum (f_{n+1}(z) - f_n(z))$ и применить (3).]

4. Субгармонические функции. Непрерывная действительнозначная функция, определенная в области D плоскости $\mathbf{C}$, называется *субгармонической*, если в любой точке $a \in D$ имеет место неравенство

$$\text{(СГ)} \qquad f(a) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) \, d\theta$$

для достаточно малого $r > 0$.

(1) Показать, что если функция $f(z)$ голоморфна в области D, то $|f(z)|^p$ является субгармонической функцией в D для любого $p \geqslant 0$.

(2) Если $f_\nu(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, — субгармонические функции в области D, то функции

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f_\nu(z), \quad a_\nu \geqslant 0; \quad \sup_{1 \leqslant \nu \leqslant n} f_\nu(z)$$

также являются субгармоническими в D.

(3) Если последовательность субгармонических функций $f_n(z)$ в области D равномерно сходится на каждом компакте, содержащемся в D, то предел этой последовательности есть также субгармоническая функция.

(4) Показать, что принцип максимума применим к субгармоническим функциям; точнее говоря:

1) Пусть f — субгармоническая функция в области D. Если f имеет локальный максимум в точке $a \in D$ (т. е. $f(z) \leqslant f(a)$ для всех z, достаточно близких к a), то функция f постоянна в окрестности точки a.

2) Пусть D — ограниченная область плоскости, а f — субгармоническая функция в D, непрерывная в $\bar{D}$. Пусть M — верхняя грань функции $f(z)$, когда z пробегает границу D. Тогда

(а) $f(z) \leqslant M$ для любого $z \in D$,

(б) если $f(a) = M$ в точке $a \in D$, то функция f постоянна.

(5) Пусть Γ — ориентированная граница компакта K, содержащегося в области D. Показать, что если u, v — действительнозначные функции, имеющие непрерывные вторые производные, то

$$\iint_K (v\Delta u - u\Delta v)\, dx\, dy =$$

$$= \int_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx + \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy.$$

(Использовать формулу Грина — Римана (см. гл. II, § 1, п. 9), положив сначала $P = -v \frac{\partial u}{\partial y}$, $Q = v \frac{\partial u}{\partial x}$, а затем поменять местами u и v.) Вывести отсюда, что если функция

$f(z)$ определена и имеет непрерывные вторые производные в области D и если $a \in D$, то

$$\iint\limits_{|z-a|\leqslant r} (\Delta f)(z)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(a+re^{i\theta})\,r\,d\theta$$

для достаточно малого $r > 0$. (Положить в первом равенстве $u = f$, $v = 1$.) Вывести отсюда, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a+\varrho e^{i\theta})\,d\theta = f(a) + \int\limits_0^{\varrho} \frac{dr}{2\pi r} \int\limits_{|z-a|\leqslant r} (\Delta f)(z)\,dx\,dy$$

для достаточно малого $\varrho > 0$, и показать, что $\Delta f(z) \geqslant 0$ при $z \in D$ и что это условие необходимо и достаточно для того, чтобы функция $f(z)$, имеющая непрерывные вторые производные, была субгармонической в области D.

Пример. Показать, что если $f(z)$ — голоморфная функция в области D, то функция $\log(1+|f(z)|^2)$ является субгармонической в D.

5. Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция в круге $|z| < R$. Показать, что если $0 < r_1 < r_2 < R$ и если функция $g(z)$ представляет собой решение задачи Дирихле в круге $|z| \leqslant r_2$, такое, что $g(r_2e^{i\theta}) = f(r_2e^{i\theta})$, то

$$g(re^{i\theta}) \geqslant f(re^{i\theta})$$

при $0 \leqslant r < r_2$. Вывести отсюда, что функция

$$m(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,d\theta$$

является непрерывной неубывающей функцией переменного r при $0 \leqslant r < R$.

6. Показать, что если функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < R$ и $\alpha > 0$ — действительное число, то функция

$$I_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\alpha\,d\theta$$

является непрерывной и неубывающей при $0 \leqslant r < R$.

Глава V

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ГОЛОМОРФНЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ. РЯДЫ, БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ; НОРМАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА

В этой главе рассматриваются исключительно функции одного комплексного переменного. Однако большую часть этих рассмотрений можно распространить на случай многих комплексных переменных.

§ 1. ТОПОЛОГИЯ ПРОСТРАНСТВА $\mathscr{C}(D)$

1. Равномерная сходимость на каждом компакте. Пусть D — область комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Будем обозначать символом $\mathscr{C}(D)$ векторное пространство *непрерывных* в области D функций (с комплексными значениями). Обозначим через $\mathscr{H}(D)$ векторное пространство *голоморфных* в области D функций.

Определение. Будем говорить, что последовательность функций $f_n \in \mathscr{C}(D)$ *равномерно сходится на каждом компакте*, если для любого компакта $K \subset D$ последовательность сужений $f_n \mid K$ равномерно сходится.

Это определение применимо, в частности, к функциям из пространства $\mathscr{H}(D)$.

Известно, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция. Поэтому если последовательность непрерывных функций f_n равномерно сходится на каждом компакте в области D, то предельная функция f такова, что ее сужение $f \mid K$ на каждый компакт $K \subset D$ непрерывно. Поскольку каждая точка области D обладает компактной окрестностью, содержащейся в D, отсюда следует, что функция f непрерывна.

Определение. Мы скажем, что ряд $\sum_n f_n$ функций $f_n \in \mathscr{C}(D)$ *нормально сходится на каждом компакте* в области D, если для каждого компакта $K \subset D$ ряд сужений $\sum_n (f_n \mid K)$ нормально сходится.

Иначе говоря, на каждом компакте K данный ряд должен мажорироваться сходящимся рядом с положительными членами. Очевидно, что если ряд сходится нормально на каждом компакте, то его частные суммы образуют последовательность, которая сходится равномерно на каждом компакте.

Предложение 1.1. *Для того чтобы последовательность функций $f_n \in \mathscr{C}(D)$ сходилась равномерно на каждом компакте в области D, достаточно (и необходимо), чтобы для любого замкнутого круга $\Sigma \subset D$ последовательность сужений $f_n|\Sigma$ равномерно сходилась. Аналогичное утверждение имеет место и для случая нормально сходящихся рядов.*

Действительно, пусть K — произвольный компакт, содержащийся в области D. Можно покрыть компакт K *конечным* числом открытых кругов, замыкания которых содержатся в D. Отсюда немедленно следует наше утверждение.

2. Основная теорема о сходимости голоморфных функций.

Теорема 1. *Если последовательность функций $f_n \in \mathscr{H}(D)$ равномерно сходится на каждом компакте, то ее предел f есть голоморфная функция в области D.*

Доказательство. Мы видели, что функция f непрерывна в области D. Чтобы доказать, что функция f голоморфна, достаточно, вследствие теоремы Морера (гл. II, § 2, п. 7, теорема 4), показать, что дифференциальная форма $f(z)\,dz$ замкнута. Для этого достаточно показать, что интеграл $\int_\gamma f(z)\,dz$ обращается в нуль всякий раз, когда путь γ является границей прямоугольника, содержащегося в области D (ср. гл. II, § 1, предложение 4.1). Но на границе прямоугольника функция f является пределом равномерно сходящейся последовательности функций f_n, поэтому

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_n \int_\gamma f_n(z)\,dz = 0.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Сумма ряда голоморфных функций, который равномерно сходится на каждом компакте области D, есть голоморфная функция в области D.*

Теорема 2. *Если последовательность функций $f_n \in \mathscr{H}(D)$ сходится к функции $f \in \mathscr{H}(D)$ равномерно на каждом компакте, то последовательность производных f'_n сходится к производной f' также равномерно на каждом компакте.*

Доказательство. Вследствие предложения 1.1 достаточно показать, что последовательность f'_n сходится к производной f' равномерно на каждом замкнутом круге, содержащемся в области D. Пусть Σ — такой круг, r — его радиус. Примем за начало координат 0 центр круга Σ. Существует число $r_0 > r$, такое, что замкнутый круг с центром 0 и радиусом r_0 еще содержится в области D. Таким образом, функции f_n голоморфны при $|z| < r_0 + \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ достаточно мало) и сходятся к функции f равномерно при $|z| \leqslant r_0$. Покажем, что последовательность f'_n равномерно сходится к производной f' при $|z| \leqslant r$. Это немедленно вытекает из следующей лемм .

Лемма. *Если функция $g(z)$ голоморфна при $|z| < r_0 + \varepsilon$ и если $|g(z)| \leqslant M$ при $|z| \leqslant r_0$, то*

$$|g'(z)| \leqslant M \frac{r_0}{(r_0 - r)^2} \quad \text{при } |z| \leqslant r < r_0. \tag{2.1}$$

Доказательство леммы. Разложим функцию $g(z)$ в сходящийся ряд

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \quad \text{при} \quad |z| \leqslant r_0. \tag{2.2}$$

Согласно неравенству Коши имеем $|a_n| \leqslant \frac{r_0^n}{M}$. С другой стороны, дифференцируя почленно, получим, что

$$g'(z) = \sum_{n \geqslant 0} n a_n z^{n-1}; \tag{2.3}$$

следовательно, при $|z| \leqslant r < r_0$ имеем

$$|g'(z)| \leqslant \frac{M}{r_0} \sum_{n \geqslant 0} \frac{n r^{n-1}}{r_0^{n-1}}. \tag{2.4}$$

Вычислим сумму ряда $\sum\limits_{n \geqslant 0} n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}$. Так как nt^{n-1}—производная от t^n, то $\sum\limits_n nt^{n-1}$ — производная от $\sum\limits_n t^n = \frac{1}{1-t}$, и, следовательно,

$$\sum_{n \geqslant 0} n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1 - r/r_0)^2}.$$

Подставляя это выражение в неравенство (2.4), получим

$$|g'(z)| \leqslant \frac{M}{r_0} \frac{1}{(1-r/r_0)^2}.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Можно дать другое доказательство теоремы 2. Из интегральной формулы Коши следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

где γ обозначает границу круга, концентрического кругу Σ и несколько большего радиуса. После дифференцирования под знаком интеграла по переменной z получим

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^2}.$$

Следовательно,

$$f'(z) = \lim_n \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(t)\,dt}{(t-z)^2} = \lim_n f'_n(z),$$

причем $f'_n(z)$ стремится к $f'(z)$ равномерно в круге Σ.

Предложение 2.1. *Пусть D — область плоскости $\mathbf{C}$. Если последовательность голоморфных функций $f_n \in \mathscr{H}(D)$ сходится равномерно на каждом компакте области D и если каждая из функций f_n нигде не обращается в нуль в области D, то предельная функция f, если она не равна нулю тождественно, также нигде не обращается в нуль в области D.*

Доказательство. Пусть функция f не равна тождественно нулю. Тогда нули функции f (которая голоморфна вследствие теоремы 1) *изолированы*, так как область D связна. Предположим, что f обращается в нуль в точке z_0. Согласно предложению 4.1 гл. III, § 5, кратность этого нуля равна интегралу

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)},$$

взятому по окружности γ малого радиуса с центром в z_0. По теореме 2 этот интеграл является пределом последовательности интегралов

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\,dz,$$

которые равны нулю, поскольку голоморфные функции f_n не обращаются в нуль в области D. Таким образом получаем противоречие, которое и доказывает наше предложение.

Определение. Мы скажем, что функция f *однолистна* в области D, если она принимает в различных точках этой области различные значения.

Предложение 2.2. *Пусть D — область плоскости $\mathbf{C}$. Если последовательность голоморфных функций $f_n \in \mathscr{H}(D)$ сходится равномерно на каждом компакте этой области и каждая из этих функций однолистна, то предельная функция f также однолистна, если только она не является константой.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть z_1 и z_2 — различные точки области D, такие, что $f(z_1) = f(z_2) = a$. Рассмотрим два открытых круга S_1 и S_2

с центрами z_1 и z_2, радиусы которых достаточно малы для того, чтобы круги S_1 и S_2 не пересекались и содержались в области D. Вследствие предложения 2.1 функция f_n при достаточно большом n принимает значение a в S_1 и в S_2, что противоречит условию.

3. Топология пространства $\mathscr{C}(D)$. Уже было определено понятие последовательности функций $f_n \in \mathscr{C}(D)$, *сходящейся равномерно на каждом компакте*.

Теперь мы уточним определение *топологии* на векторном пространстве $\mathscr{C}(D)$. На подпространстве $\mathscr{H}(D)$ мы будем рассматривать индуцированную топологию. Для каждой пары (K, ε), состоящей из компакта $K \subset D$ и числа $\varepsilon > 0$, рассмотрим подмножество $V(K, \varepsilon)$ пространства $\mathscr{C}(D)$, определенное следующим образом:

$$f \in V(K, \varepsilon) \text{ тогда и только тогда, когда } |f(x)| \leqslant \varepsilon \text{ при } x \in K. \tag{3.1}$$

Для того чтобы последовательность функций $f_n \in \mathscr{C}(D)$ сходилась к f равномерно на каждом компакте, необходимо и достаточно, чтобы для любых K и $\varepsilon > 0$ и для достаточно большого n функция $f_n - f$ принадлежала $V(K, \varepsilon)$. Это значит, что последовательность $f_n \in \mathscr{C}(D)$ имеет своим *пределом* точку f в топологии (если последняя существует и единственна), для которой множества $V(K, \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля (систему окрестностей произвольной точки f можно получить тогда, производя в векторном пространстве $\mathscr{C}(D)$ параллельный перенос, переводящий начало координат в точку f).

Предложение 3.1. *В пространстве $\mathscr{C}(D)$ существует топология (инвариантная относительно переносов), в которой множества $V(K, \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Эта топология единственна и может быть определена при помощи расстояния, инвариантного относительно переносов.*

Доказательство. Единственность этой топологии очевидна, так как нам известна фундаментальная система окрестностей нуля и, следовательно, при помощи переносов мы можем получить фундаментальную систему окрестностей любой точки пространства $\mathscr{C}(D)$.

Остается найти расстояние, инвариантное относительно переносов и такое, что множества $V(K, \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в топологии, определенной этим расстоянием.

Прежде всего введем новое понятие; мы назовем *исчерпывающей последовательностью компактов* возрастающую последовательность компактов $K_i \subset D$ (т. е. $K_i \subset K_{i+1} \subset D$), такую, что каждый компакт K, содержащийся в области D, содержится в одном из компактов K_i.

Лемма. *В области D всегда существует исчерпывающая последовательность компактов.*

Действительно, рассмотрим замкнутые круги в области D, центры которых имеют рациональные координаты и радиусы которых рациональны. Они образуют *счетное* множество, которое можно расположить в последовательность $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$.

Положим

$$K_i = \bigcup_{n \leqslant i} D_n$$

и покажем, что компакты K_i образуют исчерпывающую последовательность. Внутренние части кругов D_n образуют открытое покрытие области D, и, следовательно, каждый компакт K, содержащийся в области D, содержится в некотором компакте K_i.

Пусть теперь выбрана некоторая исчерпывающая последовательность компактов K_i. Положим для любого $f \in \mathscr{C}(D)$

$$M_i(f) = \sup_{z \in K_i} |f(z)|, \tag{3.2}$$

$$d(f) = \sum_{i \geqslant 1} 2^{-i} \inf(1, M_i(f)). \tag{3.3}$$

Ряд, определяющий величину $d(f)$, сходится, так как он мажорируется геометрической прогрессией $\sum\limits_{i \geqslant 1} 2^{-i}$.

Докажем, что $d(f)$ обладает следующими свойствами:

$$d(f)=0 \text{ тогда и только тогда, когда } f=0, \tag{3.4}$$

$$d(f+g)\leqslant d(f)+d(g), \tag{3.5}$$

$$2^{-i}\inf(1, M_i(f))\leqslant d(f),$$
$$d(f)\leqslant M_i(f)+2^{-i}. \tag{3.6}$$

Докажем (3.4). Очевидно, что если функция f тождественно равна нулю, то $d(f)=0$; обратно, из равенства $d(f)=0$ следует, в силу (3.3), что $M_i(f)=0$ для любого i. Следовательно, сужение функции f на каждый компакт K_i равно нулю; значит, функция f тождественно равна нулю.

Докажем (3.5). Очевидно, что

$$M_i(f+g)\leqslant M_i(f)+M_i(g);$$

отсюда легко выводим неравенство

$$\inf(1, M_i(f+g))\leqslant \inf(1, M_i(f))+\inf(1, M_i(g))$$

и после суммирования получаем (3.5). Соотношения (3.4) и (3.5) показывают, что если принять расстояние между f и g равным $d(f-g)$, то определенная так *метрика* удовлетворяет неравенству треугольника. Эта метрика *инвариантна относительно переносов*. Следовательно, она определяет в пространстве $\mathscr{C}(D)$ хаусдорфову топологию, инвариантную относительно переносов.

Докажем теперь неравенства (3.6). Первое немедленно следует из определения $d(f)$. С другой стороны, для любого целого $i\geqslant 1$

$$M_j(f)\leqslant M_i(f)$$

при $j\leqslant i$. Подставляя эти неравенства в (3.3), получим, что

$$d(f)\leqslant \sum_{j\leqslant i} 2^{-j}M_i(f)+\sum_{j>i} 2^{-j},$$

откуда и следует (3.6).

Чтобы закончить доказательство предложения (3.1), остается доказать, что множества $V(K, \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в определенной нами топологии.

1) Каждое множество $V(K, \varepsilon)$ является окрестностью нуля.

В самом деле, пусть даны K и $\varepsilon > 0$, причем $\varepsilon < 1$, и пусть $K \subset K_i$. Тогда из соотношения $d(f) \leqslant 2^{-i}\varepsilon$ следует, что $f \in V(K, \varepsilon)$, в силу первого неравенства (3.6).

2) Каждая окрестность нуля вида $d(f) \leqslant \varepsilon$ содержит множество вида $V(K, \varepsilon')$.

В самом деле, если ε задано, выберем число i так, чтобы было $2^{-i} \leqslant \varepsilon/2$. Тогда, в силу второго из неравенств (3.6), для любого $f \in V(K_i, \varepsilon/2)$ справедливо неравенство $d(f) \leqslant \varepsilon$.

Доказательство предложения 3.1, таким образом, закончено.

Замечание. К пространству $\mathscr{C}(D)$ и его подпространству $\mathscr{H}(D)$ можно применить известные теоремы о метрических, точнее, метризуемых топологических пространствах. Например, для того чтобы подмножество A метризуемого пространства E было *замкнутым*, необходимо и достаточно, чтобы предел любой последовательности точек подмножества A снова принадлежал A.

Точно так же, для того, чтобы отображение пространства E в метризуемое пространство E' было *непрерывным* в точке $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности x_n, сходящейся к точке x, последовательность $f(x_n)$ сходилась к точке $f(x)$. (См., например, J. Dixmier, Cours de mathematique, I, Topologie, ch. II, § 3.)

Учитывая предыдущее замечание, мы видим, что пространство $\mathscr{C}(D)$ *полно*, поскольку предел последовательности непрерывных функций, сходящихся равномерно на каждом компакте, есть непрерывная функция. Кроме того, из теорем 1 и 2 п. 2 следует, что *подпространство $\mathscr{H}(D)$ замкнуто в $\mathscr{C}(D)$, а отображение пространства $\mathscr{H}(D)$ в себя, сопоставляющее каждой функции f ее производную f', непрерывно.*

§ 2. РЯДЫ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Сходимость рядов мероморфных функций. Пусть D — область комплексной плоскости **C**. Рассмотрим последовательность функций f_n, мероморфных в D. Мы хотим придать смысл выражению: ряд $\sum\limits_n f_n$ сходится.

Определение. Мы скажем, что ряд $\sum f_n$ *равномерно сходится на множестве* $A \subset D$, если можно отбросить конечное число членов ряда так, чтобы оставшиеся функции f_n не имели полюсов на множестве A и образовывали ряд, равномерно сходящийся на этом множестве.

Точно так же мы скажем, что ряд $\sum\limits_n f_n$ *нормально сходится на множестве* A, если можно отбросить конечное число членов так, чтобы оставшиеся члены f_n не имели полюсов на множестве A и образовывали ряд, нормально сходящийся на этом множестве.

Очевидно, что всякий ряд, нормально сходящийся на множестве A, сходится на нем равномерно.

В дальнейшем мы будем рассматривать ряды мероморфных функций в области D, которые *сходятся равномерно* (соответственно *нормально*) *на каждом компакте* K, *содержащемся в области* D. Определим сумму такого ряда. В каждой области U, замыкание которой компактно в D, эта сумма представляет собой мероморфную функцию

$$\sum_{n \leq n_0} f_n + \left(\sum_{n > n_0} f_n \right), \tag{1.1}$$

где n_0 выбрано таким образом, чтобы ряд $\sum\limits_{n > n_0} f_n$ равномерно сходился в замыкании области U. В выражении (1.1) первое слагаемое как сумма конечного числа мероморфных функций является мероморфной функцией, второе слагаемое как сумма равномерно сходящегося ряда голоморфных функций в U является голоморфной функцией в области U. Легко видеть, что в области U мероморфная функция (1.1) не зависит от выбора целого числа n_0.

Теорема. *Пусть ряд* $\sum\limits_n f_n$ *функций* f_n, *мероморфных в области* D, *равномерно (соответственно нормально) сходится на каждом компакте области* D. *Тогда сумма* f *этого ряда мероморфна в области* D, *ряд производных* $\sum\limits_n f'_n$ *сходится равномерно (соответственно нормально) на каждом компакте области* D *и его суммой является производная* f' *суммы* f *данного ряда.*

Доказательство. Как мы уже видели, сумма f мероморфна в каждой области U, замыкание которой компактно в D, и, следовательно, она мероморфна в области D.

Пусть замыкание области U компактно в D. Выберем n_0, как в выражении (1.1); тогда в U имеем

$$f' = \sum_{n \leqslant n_0} f'_n + \Big(\sum_{n > n_0} f_n\Big)'. \tag{1.2}$$

Ряд $\sum\limits_{n>n_0} f_n$ функций, голоморфных в области U, можно дифференцировать почленно, поскольку он сходится равномерно на каждом компакте области U: по теореме 2 § 1, п. 2, ряд производных $\sum\limits_{n>n_0} f'_n$ равномерно сходится к $\Big(\sum\limits_{n>n_0} f_n\Big)'$ на каждом компакте, содержащемся в U. Следовательно, ряд мероморфных функций $\sum\limits_{n} f'_n$ равномерно сходится к f' на каждом компакте, содержащемся в U. Это верно для каждого открытого множества U, компактного в D. Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n} f'_n$ равномерно сходится к производной f' на каждом компакте, содержащемся в области D.

Если ряд $\sum\limits_{n} f_n$ сходится *нормально* на каждом компакте области D, то ряд $\sum\limits_{n} f'_n$ сходится нормально на каждом компакте области D вследствие леммы п. 2 § 1.

Замечание. Очевидно, что множество $P(f)$ полюсов функции f содержится в объединении множеств $P(f_n)$, где $P(f_n)$ обозначает множество полюсов функции f_n. Более того, соотношение (1.1) показывает, что если множества $P(f_n)$ попарно не пересекаются, то множество $P(f)$ в точности *равно* объединению множеств $P(f_n)$; точнее, если точка z_0 — полюс порядка k функции f_n, то она является полюсом порядка k функции f.

2. Первый пример ряда мероморфных функций. Рассмотрим ряд

$$\sum_{-\infty<n<+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}, \tag{2.1}$$

где суммирование производится по всем целым n. Покажем, что этот ряд нормально сходится на каждом компакте плоскости $\mathbf{C}$. Любой компакт содержится в полосе вида $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ (мы положили $z = x + iy$). Следовательно, достаточно показать, что ряд (2.1) нормально сходится на каждой полосе указанного вида. Такая полоса содержит лишь конечное число целых n. В отрезке ряда $\sum\limits_{n<x_0} \frac{1}{(z-n)^2}$ каждый член меньше (по модулю), чем $\frac{1}{(x_0-n)^2}$, и, следовательно, этот отрезок ряда сходится нормально в рассматриваемой полосе. Точно так же отрезок ряда $\sum\limits_{n>x_1} \frac{1}{(z-n)^2}$ нормально сходится в этой полосе. Следовательно, исключив конечное число членов ряда (2.1), мы получим ряд голоморфных функций, который сходится нормально в полосе $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, что и требовалось.

Пусть $f(z)$ — сумма ряда (2.1). Это мероморфная функция во всей плоскости $\mathbf{C}$. Она имеет период, равный 1:

$$f(z+1) = f(z).$$

Действительно,

$$\sum_n \frac{1}{(z+1-n)^2} = \sum_{n'} \frac{1}{(z-n')^2}, \quad \text{где} \quad n' = n-1.$$

Полюсами функции f являются целые точки $z = n$; все эти полюсы *двойные*. Вычет в каждом полюсе равен нулю, так как в окрестности точки $z = n$ можно положить

$$f(z) = \frac{1}{(z-n)^2} + g(z),$$

где функция g голоморфна.

Предложение 2.1. *Сумма $f(z)$ ряда* (2.1) *равна* $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$.

Доказательство. Равномерно по x имеет место соотношение $\lim\limits_{|y|\to+\infty} f(z) = 0$, иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$

существует такое a, что из $|y| \geqslant a$ следует $|f(z)| \leqslant \varepsilon$. Действительно, предположим сначала, что z остается в полосе $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, а мнимая часть y удовлетворяет неравенству $|y| \geqslant a$, где $a > 0$. В этой области ряд (2.1) является нормально сходящимся рядом голоморфных функций, каждый член которого стремится к нулю равномерно по x в данной полосе, когда $|y| \to +\infty$. Следовательно, сумма этого ряда стремится к нулю, когда $|y| \to +\infty$, равномерно по x в рассматриваемой полосе. Но функция $f(z)$ имеет период, равный 1, следовательно, если мы применим полученный результат к полосе шириной по крайней мере 1, то получим, что $f(z)$ стремится к нулю, когда $|y| \to +\infty$, равномерно по x.

Функция $g(z) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$ обладает теми же свойствами, что и функция $f(z)$:

1) она мероморфна в $\mathbf{C}$ и имеет период, равный 1;

2) ее полюсами являются целые точки $z=n$, эти полюсы двойные с главной частью $\frac{1}{(z-n)^2}$;

3) $g(z)$ стремится к нулю равномерно по x при $|y|$, стремящемся к бесконечности.

Свойство 1) очевидно. Чтобы доказать свойство 2), достаточно, в силу периодичности, показать, что начало координат 0 является двойным полюсом с главной частью $\frac{1}{z^2}$. Однако

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\pi z - \frac{1}{6}\pi^3 z^3 + \ldots}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + \ldots\right)^{-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + z^2(\ldots). \quad (2.2)$$

Что же касается свойства 3), то оно следует из соотношения

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \pi y,$$

которое показывает, что $|\sin \pi z|$ неограниченно возрастает (равномерно по x), когда $|y|$ неограниченно возрастает.

Мы можем теперь доказать предложение 2.1. Функция $f(z) - g(z)$ голоморфна в плоскости $\mathbf{C}$, поскольку функции

f и g имеют одинаковые полюсы с одинаковыми главными частями.

Покажем, что функция $f-g$ ограничена: она ограничена в полосе $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ при $|y| \leqslant a$ (поскольку непрерывная функция на компакте ограничена) и при $|y| \geqslant a$, поскольку она стремится к 0, когда $|y|$ неограниченно возрастает.

Следовательно, функция $f-g$ ограничена в каждой полосе. В силу периодичности, она ограничена во всей плоскости.

По теореме Лиувилля (гл. III, § 2, п. 2) функция $f-g$ постоянна. Поскольку она стремится к нулю, когда $|y|$ неограниченно возрастает, эта постоянная равна нулю. Предложение 2.1 доказано.

Применение. В соотношении

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2-\frac{1}{z^2}=\sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{2.3}$$

правая часть является функцией $h(z)$, голоморфной в окрестности точки $z=0$. Подставляя $z=0$, получаем $h(0)=$ $=\sum\limits_{n \neq 0} \frac{1}{n^2}$ и, следовательно,

$$\lim_{z \to 0}\left[\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2-\frac{1}{z^2}\right]=2 \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}. \tag{2.4}$$

Предел в левой части (2.4) легко вычислить, используя разложение (2.2). Этот предел равен $\frac{\pi^2}{3}$. Получаем соотношение

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}, \tag{2.5}$$

принадлежащее Эйлеру.

3. Второй пример ряда мероморфных функций. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{z}+\sum_{n \neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right). \tag{3.1}$$

Его общий член равен $\frac{z}{n(z-n)}$; читателю предоставляется самостоятельно показать, что этот ряд нормально сходится на каждом компакте плоскости $\mathbf{C}$. Следовательно, его сумма $F(z)$ мероморфна в плоскости $\mathbf{C}$. Ее полюсами являются целые точки $z=n$. Эти полюсы простые и вычеты в них равны 1.

Вследствие теоремы из п. 1 производная $F'(z)$ является суммой ряда производных, т. е.

$$F'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = \\ = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \frac{d}{dz}\left(\frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}\right).$$

Следовательно, разность $F(z) - \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}$ постоянна. Однако легко видеть из (3.1), что $F(-z) = -F(z)$, следовательно, функция $F(z) - \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}$ нечетна, а поскольку она равна постоянной, то эта постоянная равна нулю.

В ряде (3.1) можно сгруппировать попарно члены, соответствующие числам n и $-n$. Получим

$$\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{2z}{z^2-n^2},$$

а следовательно,

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi z}. \tag{3.2}$$

4. Еще один пример. Так же, как и в п. 2, можно доказать, что

$$\sum_{-\infty<n<+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)(\operatorname{tg} \pi z)}. \tag{4.1}$$

Отсюда выводится, как и в п. 3, следующее соотношение:

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{4.2}$$

5. $\wp$-функция Вейерштрасса. Рассмотрим так же, как и в п. 5 § 5 гл. III, дискретную подгруппу Ω плоскости $\mathbf{C}$, имеющую в качестве базы два вектора e_1 и e_2, отношение которых не является действительным числом. Заметим, что задание группы Ω не определяет полностью базы (e_1, e_2). Если есть другая база (e'_1, e'_2), то векторы первой базы выражаются как линейные комбинации с целыми коэффициентами векторов второй базы, и обратно. Вследствие этого определитель матрицы коэффициентов является целым числом, имеющим обратное в кольце целых чисел, т. е. он равен ± 1.

Обратно, если e'_1 и e'_2 являются линейными комбинациями с целыми коэффициентами векторов e_1 и e_2 и определитель матрицы коэффициентов равен ± 1, то с помощью правила Крамера легко установить, что и наоборот, e_1 и e_2 являются линейными комбинациями с целыми коэффициентами векторов e'_1 и e'_2. Следовательно, система (e'_1, e'_2) является базой группы Ω.

Предложение 5.1. *Пусть задана дискретная подгруппа Ω (с базой (e_1, e_2)). Тогда ряд*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \tag{5.1}$$

сходится нормально на каждом компакте плоскости $\mathbf{C}$.

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма. *Ряд* $\sum\limits_{\omega \in \Omega,\ \omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^3}$ *сходится.*

Доказательство леммы. Для каждого целого $n \geqslant 1$ рассмотрим параллелограмм P_n, образованный точками $z = t_1 e_1 + t_2 e_2$, где t_1 и t_2 — действительные числа, причем $\sup(|t_1|, |t_2|) = n$ (см. рис. 10).

На P_n имеется в точности $8n$ точек из Ω. Расстояние каждой из них до нуля не меньше kn, где k — некоторое фиксированное положительное число (k равно наименьшему расстоянию до нуля точек прямоугольника P_1). Следовательно, сумма $\sum \frac{1}{|\omega|^3}$, взятая по всем $\omega \in P_n \cap \Omega$, меньше, чем $\frac{8n}{k^3n^3}$, откуда

$$\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{|\omega|^3}\leqslant\sum\frac{8}{k^3n^2}.$$

Поскольку ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ сходится, лемма доказана.

Мы можем теперь доказать, что на всяком замкнутом круге $|z|\leqslant r$ ряд (5.1) нормально сходится. Для всех

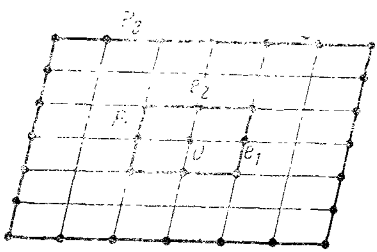


Рис. 10.

точек ω, кроме конечного числа, имеем $|\omega|\geqslant 2r$. Следовательно, для всех членов ряда (5.1), кроме конечного числа, справедлива оценка

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right|=\left|\frac{2\omega z-z^2}{\omega^2(\omega-z)^2}\right|=$$

$$=\frac{|z(2-z/\omega)|}{|\omega|^3|1-z/\omega|^2}\leqslant\frac{5r/2}{|\omega|^3/4}=\frac{10r}{|\omega|^3}\quad\text{при}\quad |z|\leqslant r.$$

Таким образом, по доказанной выше лемме ряд (5.1) нормально сходится в круге $|z|\leqslant r$.

Определение. Функция Вейерштрасса $\wp(z)$, по определению, есть мероморфная функция, являющаяся суммой ряда (5.1). (Эта функция зависит, разумеется, от задания дискретной подгруппы Ω.) Полюсами функции $\wp$ являются точки группы Ω и только они, это двойные полюсы с вычетом, равным нулю.

В самом деле, в окрестности точки $z = \omega$ имеем

$\wp(z) = \frac{1}{(z-\omega)^2} + g(z)$, где g — голоморфная функция.

Функция $\wp$ *четна* по z, так как

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

и в правой части достаточно заменить ω на $-\omega$, чтобы снова получить ряд (5.1).

Вследствие теоремы из п. 1 для производной $\wp'$ получаем разложение в ряд (сходящийся нормально на каждом компакте):

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}. \tag{5.2}$$

Это соотношение показывает нам, что функция $\wp'$ *периодична*:

$$\wp'(z+\omega) = \wp'(z) \quad \text{для любого} \quad \omega \in \Omega,$$

а также что $\wp'(-z) = -\wp'(z)$.

Докажем, что функция $\wp$ также периодична и любой элемент $\omega \in \Omega$ является ее периодом. Для этого достаточно показать, что $\wp(z+e_i) = \wp(z)$ $(i = 1, 2)$. Но

$$\wp(z+e_i) - \wp(z) = \text{const}, \tag{5.3}$$

так как производная $\wp'(z+e_i) - \wp'(z)$ равна нулю.

В соотношении (5.3) дадим переменной z значение $-\frac{e_i}{2}$. Это можно сделать, поскольку ни одна из точек $\frac{e_i}{2}$ и $-\frac{e_i}{2}$ не является полюсом функции $\wp$. Мы видим, что постоянная в правой части (5.3) равна $\wp\left(-\frac{e_i}{2}\right) - \wp\left(\frac{e_i}{2}\right)$, а следовательно, равна нулю, так как функция $\wp$ четна.

Таким образом, функция Вейерштрасса $\wp$ является мероморфной функцией, для которой любой элемент группы Ω служит периодом и которая имеет полюсы в точках группы Ω и только в них, причем каждый полюс имеет кратность 2 и главную часть $\frac{1}{(z-\omega)^2}$.

Разложение Лорана функции $\wp(z)$. В окрестности нуля функция $\wp$ обладает разложением Лорана, которое a priori имеет вид

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots, \tag{5.4}$$

так как функция $\wp$ четна; в силу формулы (5.1), функция

$$g(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \tag{5.5}$$

голоморфна в окрестности нуля и обращается в нуль при $z = 0$. Легко выразить коэффициенты a_2 и a_4 через элементы дискретной подгруппы Ω. Дифференцируя почленно ряд $g(z)$, получаем

$$a_2 = 3 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^4}, \quad a_4 = 5 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^6}. \tag{5.6}$$

Продифференцируем почленно соотношение (5.4) и возведем в квадрат. Тогда

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + \ldots.$$

Возведя (5.4) в куб, получим

$$(\wp(z))^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + \ldots, \tag{5.7}$$

откуда

$$\wp'^2 - 4\wp^3 = 20\frac{a_2}{z^2} - 28a_4 + z^2(\ldots).$$

Следовательно, функция

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + 20a_2\wp + 28a_4 \tag{5.8}$$

голоморфна в окрестности начала координат и обращается в нуль в точке 0. Однако группа Ω является группой периодов этой функции, следовательно, функция голоморфна в окрестности каждой точки из Ω и равна нулю в каждой точке из Ω. Так как эта функция не имеет полюсов вне Ω, отсюда вытекает голоморфность в любой точке плоскости. Следовательно, она ограничена на каждом компакте и, в силу периодичности, на всей плоскости **C**. Так как она равна нулю в начале координат, она тождественно равна нулю вследствие теоремы Лиувилля.

В результате получаем тождество

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + 20a_2\wp + 28a_4 = 0. \tag{5.9}$$

Это соотношение имеет важную интерпретацию: рассмотрим алгебраическую кривую

$$y^2 = 4x^3 - 20a_2x - 28a_4. \tag{5.10}$$

Формулы $x = \wp(z)$, $y = \wp'(z)$ задают параметрическое представление этой кривой. Мы покажем, что всякая точка $(x, y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, удовлетворяющая уравнению (5.10), является образом точки $z \in \mathbf{C}$, определенной однозначно с точностью до прибавления некоторого элемента из Ω.

Найдем прежде всего точку $z \in \mathbf{C}$, такую, что $2z \in \Omega$, $z \notin \Omega$. В такой точке функции $\wp$ и $\wp'$ голоморфны. В силу периодичности функции $\wp'$, имеет место равенство $\wp'(z) = \wp'(-z)$, а так как функция $\wp'$ нечетна, то $\wp'(z) = -\wp'(-z)$; следовательно, функция $\wp'$ обращается в нуль в такой точке. Мы знаем три такие точки:

$$z = \frac{e_1}{2}, \quad z = \frac{e_2}{2}, \quad z = \frac{e_1 + e_2}{2}. \tag{5.11}$$

Легко видеть, что любая точка z, такая, что $2z \in \Omega$ и $z \notin \Omega$, сравнима (mod Ω) с одной из трех точек (5.11), а классы (mod Ω) трех точек (5.11) различны.

Поскольку функция $\wp'$ обладает единственным тройным полюсом в каждом параллелограмме периодов, предложение 5.1 гл. III, § 5, показывает, что функция $\wp'$ имеет не больше трех различных нулей в каждом параллелограмме периодов. Это и есть, следовательно, три точки (5.11) или сравнимые с ними по mod Ω. Вследствие этого же предложения функция $\wp$ принимает всегда, в каждом параллелограмме периодов, каждое значение не более двух раз. Поскольку $\wp(z_0) = \wp(-z_0)$, эта функция принимает в точности два раза каждое значение вида $\wp(z_0)$, если $2z_0 \notin \Omega$. Напротив, если $2z_0 \in \Omega$, а $z_0 \notin \Omega$, то, как мы уже видели, $\wp'(z_0) = 0$ и z_0 является двойным корнем уравнения $\wp(z) = \wp(z_0)$; отсюда следует, что функция $\wp$ принимает значение $\wp(z_0)$ в параллелограмме периодов только один раз.

Итак, каждое из значений

$$\wp\left(\frac{e_1}{2}\right), \quad \wp\left(\frac{e_2}{2}\right), \quad \wp\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right)$$

принимается в каждом параллелограмме периодов только один раз и все эти значения различны. В силу (5.9), эти значения являются корнями уравнения

$$4x^3 - 20a_2x - 28a_4 = 0, \tag{5.12}$$

и, следовательно, это уравнение имеет три различных корня. В результате мы доказали

Предложение 5.1. *Если задана дискретная группа* Ω, *то уравнение* (5.12), *коэффициенты которого* a_2 *и* a_4 *определяются рядами* (5.6), *имеет три различных корня. Кроме того, для каждой точки* $(x, y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ *алгебраической кривой* (5.10) *существует единственная* (mod Ω) *точка* $z \in \mathbf{C}$, *такая, что*

$$\wp(z) = x, \quad \wp'(z) = y$$

Мы увидим (см. гл. VI, § 5, п. 3), что и обратно, если задано произвольно соотношение вида (5.10), правая часть которого имеет три различных корня, то существует дискретная группа Ω, такая, что a_2 и a_4 удовлетворяют соотношениям (5.6). Если $\wp$ — функция Вейерштрасса относительно группы ω, то формулы $x = \wp(z)$, $y = \wp'(z)$ задают параметрическое представление алгебраической кривой (5.10).

§ 3. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Определения.

Определение. Пусть $(f_n(z))$ — последовательность непрерывных функций в области D комплексной плоскости. Мы скажем, что бесконечное произведение $\prod\limits_n f_n(z)$ *нормально сходится* на подмножестве $K \subset D$, если выполнены следующие два условия.

1. Равномерно на K выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = 1$. Отсюда следует, в частности, что для достаточно большого n функция $f_n - 1$ по модулю меньше 1 на K, и, следовательно, $\log f_n$ есть функция, определенная на K (можно взять главную ветвь логарифма).

2. Ряд с общим членом $\log f_n$ (который определен для достаточно больших n) нормально сходится на K.

Можно сформулировать одно условие, эквивалентное совокупности условий 1 и 2. Положим $f_n = 1 + u_n$. Условие 1 эквивалентно утверждению, что последовательность u_n стремится к нулю равномерно на K. Когда u_n мало, $\log f_n$ и u_n представляют собой эквивалентные бесконечно малые, и, следовательно, условие 2 эквивалентно утверждению, что ряд $\sum\limits_n u_n$ нормально сходится на K.

Итак, *для того чтобы бесконечное произведение* $\prod\limits_n f_n$ *сходилось нормально на* K, *необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum\limits_n u_n$ *сходился нормально на* K.

Определение. Мы скажем, что бесконечное произведение $\prod\limits_n f_n$ *сходится нормально на каждом компакте* области D, если для произвольного компакта K, содержащегося в области D, это произведение сходится нормально на K.

Необходимое и достаточное условие такой сходимости состоит в том, что если $f_n = 1 + u_n$, то ряд $\sum\limits_n u_n$ сходится нормально на каждом компакте, содержащемся в D. Таким образом, когда n_0 безгранично возрастает, конечные произведения $\prod\limits_{n \leqslant n_0} f_n$ стремятся равномерно на каждом компакте, содержащемся в области D, к пределу $f(z)$, который, очевидно, является непрерывной функцией от z. Чтобы убедиться в этом, можно взять логарифмы сомножителей f_n для достаточно больших n.

2. Свойства нормально сходящихся произведений голоморфных функций.

Теорема 1. *Если функции* f_n *голоморфны в области* D *и если бесконечное произведение* $\prod\limits_n f_n$ *сходится нормально на каждом компакте, содержащемся в этой области, то функция* $f = \prod\limits_n f_n$ *голоморфна в* D. *Кроме того,*

$$f = f_1 f_2 \ldots f_p \Big(\prod_{n>p} f_n \Big). \tag{2.1}$$

Множество нулей функции f *есть объединение множеств нулей функций* f_n, *а кратность нуля функции* f *равна сумме кратностей этого нуля для функций* f_n.

Доказательство. Функция f голоморфна, так как она является пределом (равномерным на каждом компакте) конечных произведений, которые голоморфны. Формула ассоциативности (2.1) очевидна на каждом открытом множестве U, компактном в области D. Функции f_n не обращаются в нуль, если n достаточно велико, так как функции $u_n = f_n - 1$ стремятся к нулю равномерно на U; второе утверждение теоремы, таким образом, очевидно.

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 ряд мероморфных функций* $\sum\limits_n f'_n/f_n$ *сходится нормально на каждом компакте области* D *(в смысле п. 1 § 2) и его сумма равна логарифмической производной* f'/f.

Доказательство. Пусть U — открытое множество, компактное в области D. Функции

$$g_p = \exp\left(\sum_{n>p} \log f_n\right) \tag{2.2}$$

определены и голоморфны в U для достаточно больших p. Вследствие (2.1) в U имеет место равенство

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n\leqslant p} \frac{f'_n}{f_n} + \frac{g'_p}{g_p}. \tag{2.3}$$

Однако

$$\frac{g'_p}{g_p} = \sum_{n>p} \frac{f'_n}{f_n}, \tag{2.4}$$

причем ряд в правой части равномерно сходится на каждом компакте, содержащемся в области D. В самом деле, ряд логарифмов $\sum\limits_{n>p} \log f_n$ сходится (равномерно на каждом компакте) к $\log g_p$. Ряд производных $\sum\limits_{n>p} (\log f_n)'$ сходится (равномерно на каждом компакте) к производной g'_p/g_p (см. § 1, п. 2, теорема 2).

Сравнивая (2.3) и (2.4), мы видим, что на U

$$\frac{f'}{f} = \sum_n \frac{f'_n}{f_n},$$

причем сходимость нормальна на каждом компакте, содержащемся в U. Так как это верно для любого U, то теорема доказана.

3. Пример: разложение функции $\sin \pi z$ в бесконечное произведение. Рассмотрим бесконечное произведение

$$f(z)=z\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{3.1}$$

Это произведение сходится нормально на каждом компакте плоскости $\mathbf{C}$.

Действительно, ряд $\sum\limits_n \frac{z^2}{n^2}$ сходится нормально на каждом компакте, так как числовой ряд $\sum\limits_n \frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, функция $f(z)$ голоморфна в каждой точке плоскости, а ее нулями являются целые значения z. Все нули простые.

Вследствие теоремы 2 можно почленно брать логарифмические производные в произведении (3.1). Мы получим ряд мероморфных функций, нормально сходящийся на каждом компакте плоскости:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n\geqslant 1}\frac{2z}{z^2-n^2}. \tag{3.2}$$

Мы уже видели (§ 2, п. 3), что сумма этого ряда равна

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg}\pi z}=\frac{g'(z)}{g(z)}, \quad \text{где } g(z)=\sin \pi z.$$

Таким образом, $f'/f=g'/g$, откуда

$$\frac{f(z)}{z}=c\frac{\sin \pi z}{z}.$$

Осталось определить постоянную c. Вследствие (3.1) $f(z)/z$ стремится к 1, когда z стремится к нулю, а $\frac{\sin \pi z}{z}$ имеет предел π. Отсюда видно, что $c=\frac{1}{\pi}$. Таким образом, мы установили формулу

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z}=\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{3.3}$$

4. Г-функция. Рассмотрим для каждого целого $n \geqslant 1$ голоморфную функцию g_n, определенную формулой

$$g_n(z) = z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)n^{-z} = \frac{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}{n!}n^{-z}. \qquad (4.1)$$

Положим при $n \geqslant 2$,

$$f_n(z) = \frac{g_n(z)}{g_{n-1}(z)} = \left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^z. \qquad (4.2)$$

Если $|z| \leqslant r$ и $1 \leqslant r < n$, то можно рассмотреть главную ветвь функции $\log f_n(z)$. Тогда

$$|\log f_n(z)| \leqslant 2\left(\frac{r^2}{2n^2} + \frac{r^3}{3n^3} + \ldots\right) \leqslant 2\frac{r^2}{n^2}, \qquad (4.3)$$

если $\frac{r}{n}$ достаточно мало. Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_n \log f_n(z)$ нормально сходится на каждом компакте плоскости и поэтому бесконечное произведение $g_1 \prod\limits_{n \geqslant 2} \frac{g_n}{g_{n-1}}$ сходится нормально на каждом компакте. Его значение равно голоморфной функции $g(z)$ — пределу равномерно сходящейся на каждом компакте последовательности функций

$$g_n = g_1 f_2 \ldots f_n.$$

Нулями функции g являются точки $0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$; все эти нули простые. Если z не целое, то можно рассмотреть отношение

$$\frac{g(z)}{g(z+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{g_n(z)}{g_n(z+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{n+z+1} = z. \qquad (4.4)$$

Следовательно, мероморфная функция $\frac{g(z)}{g(z+1)}$ в действительности голоморфна и тождественно равна z. Кроме того,

$$g(1) = \lim_{n\to\infty} g_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1. \qquad (4.5)$$

Определение. Мероморфная функция $1/g(z)$ обозначается через $\Gamma(z)$. Она имеет простые полюсы в целых точках $n \leqslant 0$ и удовлетворяет соотношениям

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1, \tag{4.6}$$

что непосредственно следует из (4.4) и (4.5). Из (4.6) можно вывести по индукции, что для любого целого $n \geqslant 0$

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{4.7}$$

Теперь мы хотим вычислить произведение $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z)$. Имеем

$$g(z) \cdot g(1-z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-z}{n} z \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right), \tag{4.8}$$

что вследствие п. 3 равно $\frac{\sin \pi z}{\pi}$. Равенство обратных величин дает нам соотношение

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{4.9}$$

откуда, в частности, при $z = \frac{1}{2}$ получаем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Бесконечное произведение Вейерштрасса. Равенство (4.1) можно, очевидно, записать в виде

$$g_n(z) = z \prod_{k=1}^{n} \left(\left(1 + \frac{k}{z}\right) e^{-z/k}\right) \cdot e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)}. \tag{4.10}$$

Когда n неограниченно возрастает, показатель степени $z\left(1 + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)$ стремится к Cz, где C — постоянная Эйлера. В пределе получаем, следовательно,

$$g(z) = ze^{Cz} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}, \tag{4.11}$$

и читатель легко убедится в том, что произведение в правой части нормально сходится на каждом компакте плоскости. Так как $g = 1/\Gamma$, то, беря логарифмическую производную обеих частей равенства (4.11), получим (см. теорему 2)

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - C + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right), \tag{4.12}$$

откуда, в частности,

$$-C = \lim_{z \to 0} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z} \right). \tag{4.13}$$

Наконец, мы можем продифференцировать почленно соотношение (4.12) (ср. § 2, п. 1), откуда получим

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}. \tag{4.14}$$

Сравним ряд в правой части равенства с рядом, полученным в п. 2 § 2, сумма которого равна $\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2$. Когда z *действительно и положительно*, правая часть (4.14), очевидно, положительна. Следовательно, $\log \Gamma(z)$ является *выпуклой функцией переменного* z для действительных $z > 0$.

§ 4. КОМПАКТНЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathscr{H}(D)$

Описание компактных множеств в $\mathscr{H}(D)$, которое мы дадим, иначе называют теорией «нормальных семейств» голоморфных функций.

1. Ограниченные подмножества пространства $\mathscr{H}(D)$. Дадим определение ограниченного подмножества векторного пространства $\mathscr{H}(D)$. Это определение является частным случаем определения, пригодного для любого векторного топологического пространства. В частности, это же определение применимо к ограниченным подмножествам пространства $\mathscr{C}(D)$.

Определение. Подмножество $A \subset \mathscr{H}(D)$ называется *ограниченным*, если для произвольной окрестности нуля $V(K, \varepsilon)$ существует положительное число λ, такое, что $A \subset \lambda V(K, \varepsilon)$, где через $\lambda V(K, \varepsilon)$ обозначена гомотетия окрестности $V(K, \varepsilon)$ относительно точки 0 с коэффициентом λ. Соотношение $A \subset \lambda V(K, \varepsilon)$ означает, что для любой функции $f \in A$ и любого $z \in K$ справедливо неравенство $|f(z)| \leqslant \lambda\varepsilon$. Следовательно, *для того, чтобы множество A функций, голоморфных в области D, было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы для каждого компакта $K \subset D$ существовало такое число $M(K)$, что*

$$|f(z)| \leqslant M(K) \text{ для любого } z \in K. \tag{1.1}$$

Иными словами, множество A ограничено, если все функции $f \in A$ *равномерно ограничены на каждом компакте, содержащемся в D* (верхняя грань $M(K)$ зависит, очевидно, от компакта K).

Если A — ограниченное подмножество пространства $\mathscr{H}(D)$, то замыкание A тоже ограничено (имеется в виду замыкание в топологии, определяемой равномерной сходимостью на компактах из области D); это очевидно, так как если неравенство (1.1) выполнено для любой функции $f \in A$, то оно выполнено и для любой функции, принадлежащей замыканию A.

Предложение 1.1. *Отображение $f \to f'$ пространства $\mathscr{H}(D)$ в себя переводит всякое ограниченное множество в ограниченное.*

Это немедленно следует из леммы, которая используется при доказательстве теоремы 2 из п. 2 § 1.

2. Формулировка основной теоремы. Охарактеризуем *компактные* подмножества пространства $\mathscr{H}(D)$ голоморфных функций в области D комплексной плоскости.

Предложение 2.1. *Если множество $A \subset \mathscr{H}(D)$ компактно, то оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Пространство $\mathscr{H}(D)$ хаусдорфово, так как оно метризуемо (см. § 1, п. 2). Следовательно, всякое компактное подмножество $\mathscr{H}(D)$ *замкнуто*, согласно классической теореме из общей топологии. Осталось показать, что если множество A компактно, то оно ограничено. Пусть K — компакт, содержащийся в области D. Рассмотрим отображение

$$f \to \sup_{z \in K} |f(z)|$$

пространства $\mathscr{H}(D)$ в плоскость **C**. Это отображение, очевидно, непрерывно. Следовательно, множество значений, которые оно принимает на компактном множестве функций $f \in A$, ограничено. А это означает, что функции $f \in A$ равномерно ограничены на компакте K. Это справедливо для любого компакта K, содержащегося в D, и, следовательно, множество A действительно является ограниченным подмножеством векторного пространства $\mathscr{H}(D)$.

Замечание. Предложение 2.1. было сформулировано для пространства $\mathscr{H}(D)$, но оно также справедливо для пространства $\mathscr{C}(D)$ непрерывных функций в области D. Напротив, предложение, обратное предложению 2.1, которое мы сейчас сформулируем, справедливо только для подмножеств пространства $\mathscr{H}(D)$ *голоморфных* функций в области D.

Основная теорема. *Всякое ограниченное и замкнутое подмножество пространства* $\mathscr{H}(D)$ *компактно.*

Следствие. *Для того чтобы подмножество A пространства* $\mathscr{H}(D)$ *было компактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и замкнуто.*

Доказательство основной теоремы содержится в п. 3, 4 и 5. Основную теорему можно формулировать в следующей эквивалентной форме:

Всякое ограниченное подмножество пространства $\mathscr{H}(D)$ *компактно в* $\mathscr{H}(D)$. Обратное тоже верно.

3. Принцип доказательства основной теоремы. Пусть A — ограниченное и замкнутое подмножество пространства $\mathscr{H}(D)$. Топологическое пространство A метризуемо, поскольку оно является подпространством метризуемого пространства $\mathscr{H}(D)$.

Чтобы доказать, что A компактно, достаточно доказать, что *каждая бесконечная последовательность элементов из A содержит бесконечную подпоследовательность, которая сходится к элементу из A.*

В самом деле, в топологии справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть A — метрическое пространство, причем каждая бесконечная последовательность точек из A содержит бесконечную подпоследовательность, которая сходится к точке из A. Тогда A компактно.*

Доказательство леммы 1. Пусть (U_i) — открытое покрытие пространства A. Нужно показать, что это покрытие содержит конечное покрытие. Прежде всего докажем следующее утверждение:

а) Существует такое $\varepsilon > 0$, что любой шар $B(x, \varepsilon)$ содержится по крайней мере в одном из открытых множеств U_i (здесь через $B(x, \varepsilon)$ обозначен замкнутый шар с центром в точке $x \in A$ и радиусом ε).

Для доказательства утверждения а) предположим противное: пусть существуют последовательность точек $x_n \in A$ и убывающая последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$, стремящаяся к нулю, такие, что для любого n шар $B(x_n, \varepsilon_n)$ не содержится ни в одном из множеств U_i. По предположению последовательность (x_n) содержит бесконечную подпоследовательность, сходящуюся к точке $a \in A$. Поэтому можно предполагать, что последовательность (x_n) сходится к точке a. Пусть U_i — открытое множество, содержащее a. Тогда U_i содержит шар $B(a, r)$. Если n достаточно велико, то $x_n \in B(a, r/2)$ и $\varepsilon_n \leqslant r/2$. Отсюда следует, что шар $B(x_n, \varepsilon_n)$ содержится в U_i для достаточно большого n. Полученное противоречие доказывает утверждение а).

Теперь докажем еще одно утверждение:

б) Для любого $\varepsilon > 0$ множество A может быть покрыто *конечным* числом шаров $B(x_n, \varepsilon)$.

Очевидно, объединение предложений а) и б) показывает, что существует конечное число открытых множеств U_i, которые покрывают пространство A.

Докажем б). Снова предположим противное: пусть существует бесконечная последовательность точек $x_n \in A$, попарное расстояние между которыми больше или равно ε. Однако, по предположению леммы, в этой последовательности должна содержаться сходящаяся подпоследовательность, что, очевидно, невозможно. Доказательство леммы 1, таким образом, завершено.

4. Лемма. Вследствие п. 3 для доказательства теоремы достаточно показать, что если A — ограниченное множество, содержащееся в $\mathscr{H}(D)$, то всякая бесконечная последовательность функций $f_k \in A$ содержит подпоследовательность, которая сходится равномерно на каждом компакте области D. Для этого полезно было бы иметь критерий сходимости последовательности голоморфных функций, принадлежащих ограниченному множеству.

Лемма 2. *Пусть D — открытый круг с центром в точке z_0, и пусть A — ограниченное подмножество пространства $\mathscr{H}(D)$.*

Для того чтобы последовательность функций $f_k \in A$ сходилась в топологии, определяемой равномерной сходимостью на каждом компакте из круга D, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось следующее условие:

$\langle C(z_0) \rangle$. *Для каждого целого $n \geqslant 0$ последовательность n-х производных $f_k^{(n)}(z_0)$ имеет предел.*

(Для $n = 0$ это означает, что последовательность значений функций f_k в точке z_0 имеет предел.)

Доказательство. Условие $\langle C(z_0) \rangle$ необходимо, так как для любого n последовательность n-х производных $f_k^{(n)}$ сходится равномерно на каждом компакте круга D (§ 1, п. 2, теорема 2). Осталось показать, что из условия $\langle C(z_0) \rangle$ следует, что последовательность (f_k) сходится равномерно на каждом замкнутом круге с центром z_0 и радиуса r, строго меньшего, чем радиус круга D.

Выберем $r_0 > r$, где r_0 тоже строго меньше, чем радиус круга D. Так как множество A ограничено, существует такое число M, что

$$|f_k(z)| \leqslant M \quad \text{при} \quad |z - z_0| \leqslant r_0. \tag{4.1}$$

Рассмотрим разложение Тейлора голоморфных функций f_k:

$$f_k(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_{n,k} (z - z_0)^n. \tag{4.2}$$

Вследствие неравенства Коши имеем

$$|a_{n,k}| \leqslant \frac{M}{r_0^{\,n}}. \tag{4.3}$$

Поэтому при $|z-z_0| \leqslant r$ для произвольных k и h имеет место неравенство

$$|f_k(z)-f_h(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{0 \leqslant n \leqslant p} |a_{n,k}-a_{n,h}| r^n + {} + 2M \sum_{n>p} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n. \tag{4.4}$$

Так как $r/r_0 < 1$, то для достаточно большого p число

$$2M \sum_{n>p} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, где через ε обозначено произвольное, наперед заданное положительное число. Вследствие условия $\langle C(z_0)\rangle$, когда числа k и h оба возрастают независимо друг от друга, разность $a_{n,k} - a_{n,h}$ стремится к нулю для любого n, поскольку

$$a_{n,k} = \frac{1}{n!} f_k^{(n)}(z_0).$$

Можно, следовательно, так выбрать число k_0, чтобы при $k \geqslant k_0$, $h \geqslant k_0$ имело место неравенство

$$\sum_{0 \leqslant n \leqslant p} |a_{n,k}-a_{n,h}| r^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя эти оценки в неравенстве (4.4), мы видим, что

$$|f_k(z)-f_h(z)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad k \geqslant k_0,\ h \geqslant k_0,\ |z-z_0| \leqslant r. \tag{4.5}$$

Поэтому последовательность функций f_k равномерно сходится на замкнутом круге радиуса r с центром в точке z_0. Лемма 2, таким образом, доказана.

5. Доказательство основной теоремы. Мы теперь можем доказать основную теорему (п. 2). Данную область D можно покрыть счетной последовательностью открытых кругов с центрами $z_i \in D$. Для каждого целого $n \geqslant 0$ и для любого i рассмотрим линейное отображение

$$\lambda_i^n : \mathscr{H}(D) \to \mathbf{C}, \tag{5.1}$$

сопоставляющее каждой функции f число $f^{(n)}(z_i)$.

Рассмотрим, далее, последовательность функций f_k, принадлежащих ограниченному множеству A.

Пусть N — множество положительных целых чисел. Нам нужно показать, что существует такое бесконечное подмножество $N' \subset N$, что предел

$$\lim_{k \in N'} \lambda_i^n(f_k) \text{ существует для любой пары } (i, n). \quad (5.2)$$

Но для любых i и n числа $\lambda_i^n(f_k)$ образуют *ограниченное* множество, когда индекс k пробегает множество N, так как функции f_k содержатся в ограниченном множестве A, а отображения λ_i^n непрерывны.

Расположим счетное множество отображений λ_i^n в единую последовательность, которую обозначим $\mu_1, \ldots$ $\ldots, \mu_m, \ldots$. Требуется доказать существование такого подмножества N' множества N, что

$$\lim_{k \in N'} \mu_m(f_k) \text{ существует для любого целого } m \geqslant 1. \quad (5.3)$$

Для этого применим «диагональный процесс». Поскольку последовательность чисел $\mu_1(f_k)$ для $k \in N$ ограничена, существует такое бесконечное подмножество $N_1 \subset N$, что предел

$$\lim_{k \in N_1} \mu_1(f_k) \quad \text{существует.}$$

Последовательность чисел $\mu_2(f_k)$ для $k \in N_1$ ограничена, следовательно, существует бесконечное подмножество $N_2 \subset N_1$, такое, что предел

$$\lim_{k \in N_2} \mu_2(f_k) \quad \text{существует.}$$

Определим, таким образом, шаг за шагом бесконечные подмножества

$$N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_m.$$

Множество N_{m+1} тогда определяется как такое бесконечное подмножество множества N_m, что предел

$$\lim_{k \in N_{m+1}} \mu_{m+1}(f_k) \quad \text{существует.}$$

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность целых чисел N', определенную следующим образом: для каждого целого $m \geqslant 1$ членом с номером m последовательности N' является член с номером m последовательности N_m. Последовательность N' строго возрастает, и очевидно, что, начиная с номера m, каждое число из последовательности N' принадлежит множеству N_m. Так как это справедливо для любого m, отсюда следует, что последовательность N' удовлетворяет условию (5.3), что завершает, наконец, доказательство.

Таким образом, основная теорема п. 2 полностью доказана.

Замечание. По существу, доказательство, которое было проведено, состоит в установлении, в частном случае, того факта, что произведение (бесконечное) компактных пространств само компактно.

6. Некоторые следствия основной теоремы. Часто применяется следующий принцип.

Пусть A — ограниченное множество голоморфных функций в области D. Если последовательность функций $f_k \in A$ имеет только одну предельную точку (в смысле топологии равномерной сходимости на каждом компакте), то эта последовательность сходится (в этой топологии).

Это следует из классической теоремы топологии о компактных пространствах. В качестве применения этого принципа рассмотрим прежде всего случай, когда последовательность функций f_k сходится *в каждой точке открытого непустого подмножества* D' области D (иначе говоря, для каждого $z \in D'$ последовательность чисел $f_k(z)$ имеет предел).

Если это так и если функции f_k принадлежат *ограниченному* множеству, то последовательность f_k сходится равномерно на каждом компакте области D. В самом деле, если голоморфные функции f и g — две предельные точки последовательности f_k, то, очевидно, $f(z) = g(z)$ в каждой точке $z \in D'$, и, следовательно, f и g тождественно равны в D (в силу принципа аналитического продолжения).

Рассмотрим теперь случай ограниченной последовательности голоморфных функций f_k, удовлетворяющей условию $\langle C(z_0)\rangle$ леммы 2; z_0 — некоторая точка области D. Тогда последовательность f_k сходится равномерно на каждом компакте области D. В самом деле, если функции f и g — две предельные точки последовательности (f_k), то $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ для любого $n \geqslant 0$, и, следовательно, функции f и g совпадают, в силу принципа аналитического продолжения.

Можно также рассмотреть случай, когда ограниченная последовательность голоморфных функций f_k в области D сходится в каждой точке некоторого *недискретного* подмножества E области D. Эта последовательность сходится равномерно на каждом компакте области D, так как если функции f и g — две предельные точки последовательности (f_k), то разность $f(z) - g(z)$ обращается в нуль в каждой точке множества E и, следовательно, тождественно обращается в нуль, поскольку множество нулей голоморфной функции в области D, не равной тождественно нулю, есть дискретное множество.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в круге $|z| < 1$, причем $f(0) = 0$. Показать, что ряд $\sum\limits_{n \geqslant 1} f(z^n)$ равномерно сходится на каждом компакте этого круга. (Для данного $1 > r > 0$ использовать лемму Шварца (в круге $|z| < r$) для оценки $|f(z^n)|$ при помощи некоторой константы, умноженной на $|z|^n$, когда $|z| \leqslant r$.)

2. Пусть D — область плоскости $\mathbf{C}$, и пусть $\{f_n(z)\}$ — последовательность функций, голоморфных в D, равномерно сходящаяся на каждом компакте, содержащемся в области D, к функции $f(z)$, не равной тождественно нулю. Пусть, далее, Γ — ориентированная граница компакта K в области D, причем $f(z) \neq 0$ на Γ.

Показать, что существует такое целое положительное N, что при $n \geqslant N$ функции $f_n(z)$ не обращаются в нуль на Γ и функции f_n и f имеют одинаковое число нулей в K. [Если M — нижняя грань $|f(z)|$ на Γ и если мы выберем N так, чтобы $|f_n(z) - f(z)| < M$ при $n \geqslant N$ и $z \in \Gamma$, то можно применить теорему Руше (упр. 19 гл. III) к функциям $f(z)$ и $f_n(z) - f(z)$.]

Вывести отсюда, что если a — нуль функции $f(z)$, то существует такая последовательность (a_n) точек области D, что

$$\lim_n a_n = a, \quad f_n(a_n) = 0.$$

3. Пусть τ — комплексное число, такое, что $\operatorname{Im}\tau > 0$, и пусть $q = e^{\pi i\tau}$. Показать, что следующие два ряда сходятся равномерно на каждом компакте плоскости $\mathbf{C}$ переменной u:

$$\sum_{-\infty<n<+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi n i u},$$

$$-i \sum_{-\infty<n<+\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi i u}.$$

Обозначим через $\vartheta_0(u)$ и $\vartheta_1(u)$ голоморфные во всей плоскости функции, определяемые этими рядами; имеют место следующие соотношения:

$$\vartheta_0(u+1) = \vartheta_0(u), \quad \vartheta_1(u+1) = -\vartheta_1(u),$$

$$\vartheta_0(u+\tau) = -q^{-1}e^{-2\pi i u}\vartheta_0(u),$$

$$\vartheta_1(u+\tau) = -q^{-1}e^{-2\pi i u}\vartheta_1(u),$$

$$\vartheta_0\left(u+\frac{\tau}{2}\right) = iq^{-1/4}e^{-\pi i u}\vartheta_1(u).$$

Показать, что функции $\vartheta_0(u)$, $\vartheta_1(u)$ не равны тождественно нулю. (Показать, например, что

$$\int_0^1 |\vartheta_0(x)|^2 dx = 1 + 2\sum_{n\geq 1} |q|^{n^2}.\ )$$

Показать, что комплексные числа $m + n\tau$, где m и n — целые, являются нулями функции $\vartheta_1(u)$, а числа $m + \left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$ являются нулями функции $\vartheta_0(u)$. Оценивая интеграл от функции h'/h по периметру параллелограмма периодов, выбранного подходящим образом, показать, что других нулей у этих функций нет.

4. Пусть a — действительное число. Тем же методом, что и в п. 2 § 2, доказать следующее равенство:

$$\frac{\pi i \operatorname{sh} 2\pi a}{\sin\pi(z+ai)\sin\pi(z-ai)} = \sum_{-\infty<n<+\infty} \left(\frac{1}{z+n-ai} - \frac{1}{z+n+ai}\right)$$

и вывести отсюда, что

$$\frac{\pi}{a}\cdot\frac{\operatorname{sh} 2\pi a}{\operatorname{ch} 2\pi a - \cos 2\pi z} = \sum_{-\infty<n<+\infty} \frac{1}{(z+n)^2+a^2}.$$

5. Доказать следующие разложения:

$$\text{(I)}\qquad \frac{\pi}{\cos \pi z}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-z^2},$$

$$\text{(II)}\qquad \pi \operatorname{tg} \pi z = 2z\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-z^2}.$$

Вывести из (I), что

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$

Вывести из (I) и (II) тем же методом, что и в п. 3, § 3, следующие формулы:

$$\text{(III)}\qquad \cos \pi z=\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right),$$

$$\text{(IV)}\qquad \cos\frac{\pi z}{4}-\sin\frac{\pi z}{4}=\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{(-1)^n z}{2n-1}\right).$$

(Заметить, что

$$\frac{(\cos t/2-\sin t/2)'}{\cos t/2-\sin t/2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin t}{\cos t}.\ )$$

6. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+1/2)}{\Gamma(z+1/2)}\right)=2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right).$$

[Применить формулу (4.14).] Вывести путем интегрирования, что

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=e^{az+b}\Gamma(2z),\quad a,\ b\text{ — постоянные},$$

и определить a и b, полагая последовательно $z=1/2,\ 1$.

Вывести тем же методом более общую формулу для произвольного целого $p\geqslant 2$:

$$\Gamma(pz)=$$
$$=(2\pi)^{-(p-1)/2}e^{pz-1/2}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{p-1}{p}\right)$$

[Для определения постоянных интегрирования положить $z = 1/p$, 1. Для вычисления

$$\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{2}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\right)$$

можно использовать формулу (4.9) при $z = q/p$, $1 \leqslant q \leqslant p$ и соотношение

$$\sin\frac{\pi}{p}\cdot\sin\frac{2\pi}{p}\ldots\sin\frac{p-1}{p}\pi = p/2^{p-1} \quad (\text{при } p \geqslant 2).]$$

7. (I) Показать, что интеграл, содержащий действительный параметр x

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt,$$

сходится равномерно на каждом интервале $a \leqslant x \leqslant b$, где $0 < a < b$. Вывести отсюда, что интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ определяет голоморфную функцию $G(z)$ переменной z в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

(II) Показать, что

$$\int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \tag{1}$$

при действительном положительном x и целом n, большем или равном 1;

$$e^{-t}\left(1-\frac{e}{2n}t^2\right) \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant n. \tag{2}$$

(Доказать сначала неравенства $1 - t/n \leqslant e^{-t/r} \leqslant 1 - t/n + t^2/2n^2$, а затем применить неравенство $a^n - b^n \leqslant na^{n-1}(a-b)$, справедливое при $a \geqslant b \geqslant 0$, полагая $a = e^{-t/n}$, $b = 1 - t/n$.)

Вывести отсюда, что

$$\lim_n \int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dx$$

и что

$$G(z) = \Gamma z, \text{ если } \operatorname{Re} z > 0.$$

8. Определить вычеты функции $\Gamma(z)$ в полюсах $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

9. Показать, что если

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots + a_{2n} z^{2n} + \ldots$$

— разложение Лорана функции $\wp(z)$ в нуле, то дифференциальное уравнение (5.9) из § 2 позволяет последовательно определить коэффициенты a_{2n}, $n \geqslant 3$, как полиномы от a_2, a_4. Вычислить явно a_6 и a_8.

10. Пусть P — параллелограмм периодов функции $\wp$. Показать, что если α и β — два комплексных числа, то функция

$$\wp'(z) - \alpha\wp(z) - \beta \tag{1}$$

имеет в P три нуля и их сумма равна периоду (использовать предложения 5.1 и 5.2 гл. III, § 5).

Вывести, что если u и v — два комплексных числа, причем $u \pm v \not\equiv 0 \pmod{\Omega}$, то можно найти такие числа α и β, что функция (1) имеет своими нулями числа u, v и $-u-v$. Вывести отсюда, что если $u + v + w = 0$, то

$$\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

11. Воспользуемся обозначениями упражнения 3. Показать, что бесконечное произведение

$$\prod_{n \geqslant 1} [(1 - q^{2n-1} e^{2\pi i u})(1 - q^{2n-1} e^{-2\pi i u})]$$

определяет функцию $f(u)$, голоморфную в каждой точке плоскости комплексного переменного u. Какие точки будут нулями функции $f(u)$? Показать, что

$$f(u) = c\vartheta_0(u),$$

где c — постоянная.

(Показать, что $f(u)/\vartheta_0(u)$ — двоякопериодическая функция, голоморфная во всей плоскости, и применить следствие предложения 5.1 гл. III, § 5.)

Глава VI
ГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ. ПРИМЕРЫ

1. Локальное изучение голоморфного отображения $w=f(z)$ при $f'(z_0)\neq 0$.

Предложение 1.1. *Пусть $w=f(z)$ — функция, голоморфная в окрестности точки z_0 и такая, что $f'(z_0)\neq 0$. Положим $w_0=f(z_0)$. Если z и w достаточно близки соответственно к z_0 и w_0, то соотношение $w=f(z)$ эквивалентно соотношению $z=g(w)$, где g — вполне определенная функция переменного w, голоморфная в окрестности точки w_0, такая, что $g(w_0)=z_0$.*

Это вытекает из предложения 9.1 § 2 гл. I, а также из предложения 6.1 § 5 гл. IV. Таким образом, в окрестности данной точки преобразование, обратное к голоморфному отображению с отличной от нуля производной, есть голоморфное отображение. Более того, в предыдущих обозначениях производная g' находится по формуле

$$g'(w)=\frac{1}{f'(z)}.$$

В частности, эта производная отлична от нуля в точке w_0.

Обозначим $f'(z_0)$ через c. Тогда c — отличное от нуля комплексное число. Линейное (однородное) преобразование, касательное к отображению f в точке z_0, есть преобразование

$$W=cZ. \tag{1.1}$$

Рассматриваемое как преобразование плоскости, это преобразование представляет собой *растяжение с поворотом, сохраняющее ориентацию*. В частности, оно *сохраняет углы и их ориентацию*. Иными словами, две дифференцируемые дуги γ_1 и γ_2 плоскости (z), начинающиеся в точке z_0, преобразованием $w = f(z)$ переводятся в две дифференцируемые дуги с началом в точке w_0, причем ориентированный угол между последними равен ориентированному углу между γ_1 и γ_2. Поэтому говорят, что голоморфное отображение $w = f(z)$ *конформно* во всякой точке z_0, в которой производная $f'(z_0)$ отлична от нуля.

Обратно, всякое линейное (однородное) преобразование плоскости, сохраняющее углы (но не обязательно их ориентацию), есть преобразование вида (1.1) или вида

$$W = c\bar{Z}. \tag{1.2}$$

Действительно, если T—преобразование с этим свойством, то существует линейное (однородное) отображение S, сохраняющее ориентацию, такое, что композиция $S^{-1}\circ T$ оставляет неподвижной точку с координатами (1, 0).

Поскольку преобразование $S^{-1}\circ T$ сохраняет углы, точка (0, 1) переходит в точку $(0, a)$, где a — действительное число, отличное от нуля. Следовательно, точка (1.1) переходит в точку $(1, a)$, и так как векторы (1, 1) и $(1, a)$ должны образовывать равные углы с вектором (1, 0), то $a = \pm 1$. Если $a = 1$, то преобразование $S^{-1}\circ T$ тождественно и преобразование $T = S$ имеет вид (1.1). Если же $a = -1$, то преобразование $S^{-1}\circ T = U$ есть отражение относительно действительной оси и преобразование $T = S\circ U$ имеет вид (1.2). Наше утверждение доказано.

В случае (1.1) линейное преобразование сохраняет ориентацию; в случае (1.2) оно изменяет ориентацию.

Рассмотрим преобразование $w = f(z)$, определенное в области D плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Предположим, что оно непрерывно дифференцируемо и его якобиан отличен от нуля во всей области D. Если это преобразование сохраняет углы (иначе говоря, если в каждой точке области D касательное преобразование имеет вид (1.1) или (1.2)), то в каждой точке области D выполнено одно из соотношений

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Однако ни в какой точке области D эти соотношения не могут выполняться одновременно, так как в этом случае частные производные f по x и по y равны в этой точке нулю, что невозможно, ибо по условию якобиан не равен нулю. Так как функции $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$ непрерывны, множество нулей каждой из них замкнуто в области D. Таким образом, область D является объединением двух непересекающихся замкнутых множеств; поскольку D связна, одно из этих множеств пусто.

Таким образом, возможны только два случая: либо $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ во всех точках области D (тогда преобразование f голоморфно), либо $\frac{\partial f}{\partial z}=0$ (тогда f есть голоморфная функция переменного $\bar{z}$). Во втором случае преобразование f называется *антиголоморфным*. Таким образом, справедливо такое утверждение.

Предложение 1.1. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое отображение, якобиан которого отличен от нуля во всех точках области D, сохраняло углы, необходимо и достаточно, чтобы оно было голоморфным или антиголоморфным. В первом случае оно сохраняет ориентацию углов, во втором — меняет.*

2. Локальное изучение голоморфного отображения $w=f(z)$ при $f'(z_0)=0$. Сначала мы рассмотрим частный случай, а именно преобразование

$$w=z^p, \tag{2.1}$$

где $p \geqslant 2$ — целое число. При $z=0$ производная функции z^p равна нулю. Обратное преобразование

$$z=w^{1/p} \tag{2.2}$$

многозначно: каждому отличному от нуля значению w соответствует p различных значений z. При преобразовании (2.1) не сохраняются углы в начале координат, поскольку аргумент числа w в p раз больше аргумента числа z, а следовательно, и углы при этом преобразовании возрастают в p раз.

Если точка z обходит один раз начало координат, то точка w обходит начало координат p раз в том же направлении.

Мы предоставляем читателю сформулировать точное утверждение, используя понятия *индекса обхода* замкнутой кривой точкой z и индекса обхода образа такой кривой точкой w.

Теперь рассмотрим общий случай голоморфного отображения $w = f(z)$, такого, что $f'(z_0) = 0$. Для простоты будем считать, что $z_0 = 0$, $f(z_0) = 0$. Мы сделаем также важное для дальнейшего предположение, что функция f не равна тождественно нулю в окрестности точки 0.

Если p есть кратность нуля, который функция f имеет в начале координат, то разложение функции f в ряд Тейлора в точке 0 имеет вид

$$w = cz^p(1 + f_1(z)), \tag{2.3}$$

где $c \neq 0$ — постоянная, f_1 — функция, голоморфная в начале координат, такая, что $f_1(0) = 0$.

Обозначим через $f_2(z)$ одну из непрерывных ветвей функции $c^{1/p}(1 + f_1(z))^{1/p}$. Функция $f_2(z)$ голоморфна в окрестности начала координат, причем $f_2(0) \neq 0$. Соотношение (2.3) эквивалентно соотношению

$$w = (zf_2(z))^p. \tag{2.4}$$

Положим

$$zf_2(z) = t. \tag{2.5}$$

Согласно п. 1, из этого соотношения вытекает, что $z = g(t)$, где g — функция, голоморфная в окрестности начала координат, причем $g'(0) \neq 0$. В силу (2.4), имеем

$$t = w^{1/p},$$

откуда

$$z = g(w^{1/p}). \tag{2.6}$$

Таким образом, соотношение $w = f(z)$ эквивалентно в окрестности начала координат соотношению вида (2.6), *где g есть функция, равная нулю в точке* 0 *и голоморфная в окрестности этой точки, причем* $g'(0) \neq 0$.

В частности, любому значению w, достаточно близкому к нулю и не равному нулю, соответствует ровно p различных значений z. Говорят, что начало координат есть *критическая точка* порядка p преобразования (2.6), обратного к преобразованию $w = f(z)$.

3. Голоморфные отображения

Теорема. *Пусть f — функция, не являющаяся константой, голоморфная в открытом множестве D. Тогда множество $f(D)$ открыто в комплексной плоскости.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любой точки $z_0 \in D$ множество $f(D)$ содержит некоторую окрестность точки $f(z_0)$. Если $f'(z_0) \neq 0$, то, согласно п. 1, функция f определяет гомеоморфизм некоторой окрестности точки z_0 на некоторую окрестность точки $f(z_0)$. Если же $f'(z_0) = 0$, то, согласно п. 2, существует сколь угодно малая окрестность точки z_0, в которой функция f принимает p раз каждое значение, достаточно близкое к $f(z_0)$ и отличное от $f(z_0)$. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Замечание. Для всякого открытого множества D', содержащегося в D, множество $f(D')$ открыто. Иными словами, *отображение f открыто.*

Следствие. *Если функция f голоморфна и однолистна* (см. гл. V, § 1, п. 2) *в области D, то f есть гомеоморфизм открытого множества D на открытое множество $f(D)$, причем обратное отображение голоморфно в $f(D)$.*

Доказательство. Отображение f инъективно (т. е. переводит различные точки в различные), непрерывно и открыто. Обратное отображение также непрерывно, так как f открыто. Так как отображение f однолистно, то, в силу п. 2, во всех точках $z_0 \in D$ производная $f'(z_0)$ отлична от нуля. Следовательно, отображение f^{-1} голоморфно во всех точках множества $f(D)$, согласно п. 1.

Определение. Пусть D — открытое множество в плоскости переменного z, D' — открытое множество в плоскости переменного w. Гомеоморфизм f множества D на множество D' называется *изоморфизмом*, если как отображение f, так и обратное отображение f^{-1} являются *голоморфными*.

Из приведенного выше следствия вытекает, что отображение, голоморфное и однолистное в открытом множестве D, определяет *изоморфизм* множества D на множество $f(D)$.

Замечание. Приведенные здесь определения и результаты без изменений переносятся на более общий случай отображения, заданного в открытом множестве D на сфере Римана и принимающего значения также на сфере Римана.

4. Примеры многолистных голоморфных отображений. Функция f может быть многолистной (т. е. неоднолистной) в области D даже в том случае, когда производная $f'(z)$ всюду в этой области отлична от нуля. Наиболее простым примером является преобразование

$$w = e^z,$$

которое имеет период $2\pi i$. При этом преобразовании полоса $a < \operatorname{Im} z < b$ переходит в множество тех точек w, для которых

$$a < \arg w < b.$$

В этой полосе преобразование однолистно лишь в том случае, когда

$$b - a \leqslant 2\pi.$$

В качестве другого примера мы рассмотрим преобразование $w = \cos z$, производная которого обращается в нуль во всех точках z, являющихся целочисленными кратными π. Имеем

$$w = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

Следовательно, преобразование $w = \cos z$ является композицией двух преобразований:

$$t = e^{iz} \quad \text{и} \quad w = \frac{1}{2}(t + 1/t).$$

Исследуем обратное преобразование. Пусть дано произвольное комплексное число w; ему сопоставляются два значения t, а именно два корня квадратного уравнения

$$t^2 - 2wt + 1 = 0.$$

Произведение этих корней равно 1; они различны, если $w \neq \pm 1$. Каждому из этих корней соответствует бесконечное множество значений z, получаемых из одного из них прибавлением всевозможных целочисленных кратных числа 2π.

Положим $z = x + iy$, $w = u + iv$, где x, y, u, v — действительные числа. Тогда

$$u = \operatorname{ch} y \cos x; \quad v = -\operatorname{sh} y \sin x.$$

Если зафиксировать y, то при изменении x точка (u, v) описывает эллипс

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 y} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 y} = 1$$

(этот эллипс проходится один раз, когда x пробегает интервал длиной 2π).

Если зафиксировать x, то при изменении y точка (u, v) по одному разу пробегает обе ветви гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 x} = 1.$$

Для того чтобы изучить, как изменяется w в зависимости от z, достаточно, в силу периодичности, чтобы x изменялся между $-\pi$ и $+\pi$, а y — между $-\infty$ и $+\infty$. Далее, если заменить z на $-z$, то w не изменится. Следовательно, достаточно рассматривать значения x только между 0 и π. Если заменить y на $-y$, не изменяя x, то u не изменится, а v изменится на $-v$.

Следовательно, любые две точки z_1 и z_2, симметричные относительно действительной оси, переходят в точки w_1 и w_2, также симметричные относительно действительной оси. Таким образом, достаточно, чтобы x изменялся между 0 и π, а y — между 0 и $+\infty$. Обозначим через D область

$$0 < x < \pi, \quad y > 0. \tag{D}$$

Сначала выясним, во что переходит при рассматриваемом преобразовании ориентированная граница области D. Когда $x = 0$, а y убывает от $+\infty$ до 0, w пробегает отрезок действительной оси от $+\infty$ до $+1$; когда $y = 0$, а x возрастает от 0 до π, w пробегает на действительной оси отрезок от $+1$ до -1; наконец, когда $x = \pi$, а y возрастает от 0 до $+\infty$, w, оставаясь на действительной оси, убывает от -1 до $-\infty$.

Таким образом, функция $w = \cos z$ гомеоморфно отображает границу области D на действительную ось.

Читателю предлагается самостоятельно доказать, что область D гомеоморфно отображается на нижнюю полуплоскость $v < 0$. Более точно, если точка z пробегает

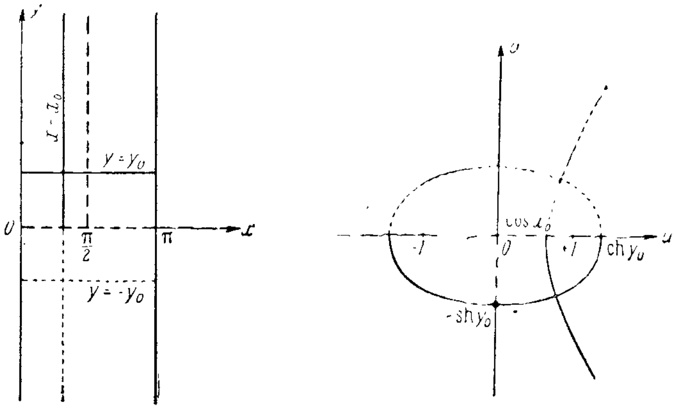


Рис. 11.

отрезок $y = y_0 > 0$, $0 < x < \pi$, то точка w один раз обходит полуэллипс с фокусами в точках $+1$ и -1, расположенный в нижней полуплоскости, большая и малая полуось которого соответственно равны $\operatorname{ch} y_0$ и $\operatorname{sh} y_0$. Если же точка z пробегает полупрямую $x = x_0$ $(0 < x_0 < \pi)$, $y > 0$, то точка w один раз обходит полуветвь гиперболы, расположенную в полуплоскости $v < 0$, с фокусами в точках $+1$ и -1, полуоси которой равны соответственно $|\cos x_0|$ и $\sin x_0$.

Полоса $0 < x < \pi$ $(-\infty < y < \infty)$ при рассматриваемом преобразовании гомеоморфно отображается на всю плоскость, за исключением двух полупрямых, расположенных на действительной оси: $w \geqslant +1$ и $w \leqslant -1$.

Что касается углов, заметим, что преобразование $w = \cos z$ удваивает углы в точках $z = 0$ и $z = \pi$ (прямые углы границы области D преобразуются в развернутые). Это соответствует тому, что эти точки являются простыми нулями производной $-\sin z$ функции $\cos z$. Внутри D

преобразование сохраняет углы. Оно переводит прямые, параллельные осям координат плоскости (z), в софокусные эллипсы и гиперболы.

§ 2. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

1. Постановка задачи. Пусть D и D' — две области на сфере Римана S_2. Спрашивается, существует ли изоморфизм области D на область D', или, что то же самое, существует ли голоморфное однолистное отображение области D на область D'. Условие, необходимое для того, чтобы эта задача имела решение, носит чисто топологический характер. *Необходимо*, чтобы области D и D' были гомеоморфны, поскольку всякий изоморфизм есть гомеоморфизм. Например, если область D односвязна, то необходимо, чтобы и область D' была односвязна. Это необходимое условие не является, однако, достаточным, что вытекает, например, из следующей теоремы.

Теорема 1. *Плоскость* $\mathbf{C}$ *и открытый круг* $|z| < 1$ *не изоморфны (хотя они и гомеоморфны).*

Доказательство. Предположим, что существует изоморфизм f плоскости $\mathbf{C}$ на круг $|z| < 1$. Тогда f есть ограниченная функция, голоморфная во всей плоскости $\mathbf{C}$. По теореме Лиувилля, эта функция постоянна, что противоречит условию однолистности f.

2. Автоморфизмы области. Предположим, что существует по крайней мере один изоморфизм f области D на область D'. Как с его помощью определить *все изоморфизмы* g области D на область D'? Преобразование $S = f^{-1} \circ g$ есть изоморфизм области D на себя, или, иначе говоря, автоморфизм области D. Очевидно,

$$g = f \circ S. \tag{2.1}$$

Обратно, если S — автоморфизм области D, то преобразование g, определенное по формуле (2.1), представляет собой изоморфизм области D на область D'. Таким образом, все изоморфизмы области D на область D' могут быть получены как композиции всевозможных автоморфизмов области D и некоторого фиксированного изоморфизма области D на область D'. Ясно, что автоморфизмы области D образуют *группу*. Эту группу мы обозначим через $\Gamma(D)$.

Если f — изоморфизм области D на область D', то отображение $S \to f \circ S \circ f^{-1}$ представляет собой изоморфизм группы $\Gamma(D)$ на группу $\Gamma(D')$.

Несколько следующих пунктов посвящено явному вычислению группы $\Gamma(D)$ для некоторых конкретных областей D.

3. Автоморфизмы комплексной плоскости. Выберем в качестве области D всю плоскость $\mathbf{C}$.

Пусть отображение $z \to f(z)$ — некоторый автоморфизм плоскости $\mathbf{C}$. Так как функция $f(z)$ голоморфна в плоскости $\mathbf{C}$, a priori возможны только два случая:

1) бесконечная точка является существенно особой точкой функции f;

2) функция f представляет собой полином.

Как мы сейчас увидим, случай 1) невозможен. В самом деле, так как отображение f однолистно, образ при этом отображении множества $|z| > 1$ не имеет общих точек с образом круга $|z| < 1$. Последний представляет собой непустую область. Следовательно, образ множества $|z| > 1$ не является всюду плотным в плоскости, благодаря чему, в силу теоремы Вейерштрасса (гл. III, § 4, п. 1), бесконечная точка не является существенно особой для функции $f(z)$. Следовательно, функция f есть полином степени $n \geqslant 1$. По теореме Даламбера уравнение $f(z) = w$ имеет n различных корней (за исключением некоторых частных значений w). По предположению, отображение f однолистно; поэтому $n = 1$. Мы доказали, таким образом, следующую теорему.

Теорема 2. *Группа автоморфизмов плоскости* $\mathbf{C}$ *состоит из линейных преобразований*

$$z \to az + b \quad (a \neq 0). \tag{3.1}$$

Если $a = 1$, то преобразование (3.1) представляет собой *параллельный перенос*; при $b \neq 0$ оно не имеет в этом случае неподвижных точек. Напротив, при $a \neq 1$ преобразование имеет единственную неподвижную точку, а именно

$$z = \frac{b}{1-a}.$$

Заметим, что преобразования (3.1) образуют группу, действующую на плоскости $\mathbf{C}$ *транзитивно*; иначе говоря, если на плоскости $\mathbf{C}$ даны некоторые две точки z_1 и z_2, то существует по крайней мере одно преобразование из этой группы, которое переводит z_1 в z_2. Без труда находится *стационарная подгруппа* точки z_0, т. е. подгруппа тех преобразований, которые оставляют точку z_0 неподвижной. Например, стационарная подгруппа начала координат состоит из преобразований вида $z \longrightarrow az$.

4. Автоморфизмы сферы Римана. Рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0. \tag{4.1}$$

Если умножить числа a, b, c и d на одно и то же комплексное число, отличное от нуля, мы получим то же самое преобразование. Поэтому естественно считать, что числа a, b, c и d определены с точностью до умножения на одну и ту же константу.

Такое преобразование определено на сфере Римана $\mathbf{S}_2$ и принимает значения также на сфере Римана $\mathbf{S}_2$. Более точно, если $z = \infty$, то $w = a/c$ при $c \neq 0$ и $w = \infty$ при $c = 0$ (в этом случае $a \neq 0$). Любое преобразование вида (4.1) обладает обратным преобразованием

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}. \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что любое дробно-линейное преобразование представляет собой гомеоморфизм сферы $\mathbf{S}_2$ на себя.

Таким образом, преобразования вида (4.1) образуют группу G автоморфизмов сферы $\mathbf{S}_2$. Мы докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Не существует никаких автоморфизмов сферы Римана $\mathbf{S}_2$, кроме дробно-линейных преобразований.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппу группы G, состоящую из тех преобразований, которые оставляют неподвижной бесконечную точку сферы $\mathbf{S}_2$. Это те преобразования, для которых $c = 0$; поскольку в этом случае $d \neq 0$, мы можем считать, что $d = 1$. Иначе говоря, подгруппа группы G, состоящая из тех преобразований, которые оставляют бесконечную точку неподвижной, есть не что иное, как группа всех автоморфизмов $w = az + b$ плоскости $\mathbf{C}$ (теорема 2). Следовательно, это группа всех автоморфизмов сферы Римана S_2, оставляющих неподвижной бесконечную точку.

Теорема 3 вытекает, таким образом, из следующей леммы общего характера.

Лемма. *Пусть D — область на сфере Римана S_2 и G — подгруппа группы $\Gamma(D)$ всех автоморфизмов области D. Предположим, что выполняются следующие условия:*

а) *группа G действует на области D транзитивно;*

б) *стационарная подгруппа некоторой точки области D (т. е. группа всех автоморфизмов области D, оставляющих эту точку неподвижной) содержится в G.*

Тогда группа G есть группа всех автоморфизмов области D.

Доказательство леммы. Пусть $S \in \Gamma(D)$, и пусть $z_0 \in D$ — точка, стационарная подгруппа которой содержится в G. Так как группа G действует на D транзитивно, то существует автоморфизм $T \in G$ области D, такой, что $T(z_0) = S(z_0)$. Но тогда автоморфизм $T^{-1} \circ S \in \Gamma(D)$ оставляет точку z_0 неподвижной и поэтому принадлежит группе G. Следовательно, автоморфизм $S = T \circ (T^{-1} \circ S)$ также принадлежит группе G. Теорема доказана.

5. Геометрическое изучение группы дробно-линейных преобразований; эквивалентность полуплоскости и круга. Если $c \neq 0$, то преобразование (4.1) может быть представлено в хорошо известной канонической форме:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)/c^2}{z + d/c}. \tag{5.1}$$

Отсюда вытекает, что преобразование (4.1) является композицией следующих преобразований:

$$z_1 = z + \frac{d}{c}; \quad z_2 = \frac{1}{z_1}; \quad z_3 = kz_2, \quad w = z_3 + \frac{a}{c}$$

$\left(\text{где } k = \dfrac{bc - ad}{c^2}\right)$, каждое из которых есть дробно-линейное преобразование частного вида.

Таким образом, всякое дробно-линейное преобразование есть композиция параллельных переносов, подобия с отличным от нуля коэффициентом и инверсии с отражением $z' = 1/z$ (последняя представляет собой композицию отражения относительно действительной оси и инверсии относительно окружности радиуса 1 с центром в начале координат). Это утверждение доказано нами в случае $c \neq 0$; но оно, очевидно, верно также и при $c = 0$. Из него вытекает, что всякое дробно-линейное преобразование переводит окружность или прямую в окружность или прямую (прямая рассматривается как окружность, проходящая через бесконечную точку). С другой стороны, всякое дробно-линейное преобразование конформно, так как оно представляет собой дробно-линейное преобразование сферы S_2 в себя. В частности, оно переводит ортогональные окружности (прямые) в ортогональные окружности (прямые).

Пусть даны две произвольные окружности (или прямые). Тогда существует дробно-линейное преобразование, переводящее одну из них в другую. В частности, существует дробно-линейное преобразование, переводящее действительную ось $y = 0$ в единичную окружность. Таким является, например, преобразование

$$w = \frac{z-i}{z+i}. \tag{5.2}$$

Для того чтобы проверить это, достаточно убедиться в том, что какие-нибудь три точки на действительной оси (например, точки 0, 1 и ∞) переходят в точки на единичной окружности (в данном случае в точки $w = -1$, $w = -i$ и $w = 1$).

Ясно, что дробно-линейное преобразование, переводящее действительную ось в единичную окружность, переводит одну из двух полуплоскостей, ограничиваемых действительной осью, во внутренность единичного круга, другую — во внешность (включая бесконечную точку). В случае преобразования (5.2) верхняя полуплоскость переходит в круг $|w| < 1$, так как точка $z = i$ переходит в точку $w = 0$.

6. Автоморфизмы полуплоскости и единичного круга. Обозначим через P полуплоскость $y > 0$, через B — открытый круг $|w| < 1$. Согласно замечанию, сделанному в конце п. 2, преобразование (5.2) устанавливает изоморфизм групп $\Gamma(P)$ и $\Gamma(B)$. Вычислим эти две группы.

Ранее (в п. 4) мы уже вычислили группу всех автоморфизмов сферы Римана. Те из них, которые переводят действительную ось $y = 0$ в себя, образуют подгруппу этой группы. Это подгруппа тех дробно-линейных преобразований

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \tag{6.1}$$

у которых коэффициенты a, b, c и d *действительны*. В самом деле, очевидно, что если коэффициенты действительны, то преобразование (6.1) переводит действительную ось в себя.

Обратно, если действительная ось переходит при преобразовании (6.1) в себя, то коэффициенты a, b, c и d определяются, с точностью до некоторого множителя, из системы линейных уравнений с действительными коэффициентами, которая получается, если рассмотреть три различные точки z_1, z_2, z_3 на действительной оси и записать, что образы этих точек действительны.

Поскольку коэффициенты преобразования (6.1) определяются с точностью до отличного от нуля действительного множителя, можно предположить, что $ad - bc = \pm 1$. Легко видеть, что среди преобразований (6.1) переводят верхнюю полуплоскость $y > 0$ в себя те, для которых $ad - bc = 1$; в самом деле, достаточно проверить, что действительная часть числа $\frac{ai+b}{ci+d}$ положительна. Преобразования вида (6.1), для которых $ad - bc = 1$, образуют подгруппу G группы $\Gamma(P)$ автоморфизмов полуплоскости P; каждое преобразование группы G определяет коэффициенты a, b, c, d с точностью до множителя ± 1.

Теорема 4. *Группа G содержит все автоморфизмы полуплоскости P.*

Из этой теоремы будет следовать, что всякий автоморфизм полуплоскости P может быть продолжен до автоморфизма сферы Римана, что a priori совсем не очевидно.

Для того чтобы доказать, что $G = \Gamma(P)$, заметим сначала, что группа G действует в полуплоскости P транзитивно. В самом деле, очевидно, что точка i может быть переведена преобразованием, содержащимся в группе G, в любую точку $a+ib$ $(b>0)$. Если мы покажем, что стационарная подгруппа какой-нибудь точки полуплоскости (например, точки $z=i$) содержится в G, то теорема 4 будет верна в силу леммы из п. 4.

Все свелось, таким образом, к тому, чтобы доказать, что стационарная подгруппа точки i состоит из дробно-линейных преобразований. Преобразование (5.2) определяет изоморфизм этой группы на подгруппу группы $\Gamma(B)$, состоящую из тех автоморфизмов круга $|w|<1$, которые оставляют неподвижной точку 0. Таким образом, осталось доказать следующее утверждение:

Предложение 6.1. *Если некоторый автоморфизм круга* $|z|<1$ *оставляет неподвижной точку* 0, *то он представляет собой поворот* $z \to ze^{i\theta}$, *где* θ — *некоторый угол.*

Доказательство предложения 6.1. Пусть $z \to f(z)$ — некоторый автоморфизм единичного круга, такой, что $f(0)=0$. Согласно лемме Шварца (гл. III, § 3), имеем

$$|f(z)| \leqslant |z|$$

для всех z, таких, что $|z|<1$. Далее, применяя лемму Шварца к обратному преобразованию, получаем

$$|z| \leqslant |f(z)|.$$

Сравнивая эти два неравенства, приходим к тому, что $|f(z)|=|z|$, откуда, в силу той же леммы Шварца, $f(z)=cz$, где c — некоторая константа, $|c|=1$. Предложение 6.1, а следовательно, и теорема 4 доказаны.

В качестве упражнения определим стационарную подгруппу точки $z=i$ в группе автоморфизмов верхней полуплоскости $y>0$. Преобразование (5.2) является изоморфизмом этой подгруппы на стационарную подгруппу точки 0 в группе автоморфизмов единичного круга. Отсюда получаем, что исследуемая группа состоит из преобразований вида

$$z \to \frac{z+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-z\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}},$$

где θ — вещественный параметр.

Для того чтобы определить группу автоморфизмов единичного круга $|z| < 1$, достаточно преобразовать с помощью (5.2) группу автоморфизмов верхней полуплоскости. Но мы будем действовать непосредственно. Речь идет о вычислении всех дробно-линейных преобразований

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

которые переводят окружность $z\bar{z} - 1 = 0$ в окружность $z'\bar{z}' - 1 = 0$, и открытый круг $1 - z\bar{z} > 0$ — в открытый круг $1 - z'\bar{z}' > 0$. Первое из условий означает, что если z по модулю равно 1, то имеет место равенство

$$(az+b)(\bar{a}\bar{z}+\bar{b}) = (cz+d)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d}),$$

т. е.

$$a\bar{b} = c\bar{d} \tag{6.2}$$

и

$$a\bar{a} - c\bar{c} = d\bar{d} - b\bar{b}. \tag{6.3}$$

Отсюда

$$1 - z'\bar{z}' = \frac{(d\bar{d} - b\bar{b})(1 - z\bar{z})}{|cz+d|^2}.$$

Для того чтобы из неравенства $1 - z\bar{z} > 0$ следовало $1 - z'\bar{z}' > 0$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$d\bar{d} - b\bar{b} > 0. \tag{6.4}$$

Из неравенства (6.4) и равенства (6.3) вытекает, что $a \neq 0$, $d \neq 0$; из (6.2) в свою очередь следует, что

$$\frac{c}{a} = \frac{\bar{b}}{\bar{d}} = \bar{\lambda}, \quad \text{где} \quad |\lambda| < 1,$$

и, в силу (6.3),

$$|a| = |d|.$$

Отсюда

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}\,\frac{z + \lambda\dfrac{d}{a}}{1 + \bar{\lambda}\dfrac{a}{d}z} = e^{i\theta}\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z},$$

где θ — действительное, а z_0 — комплексное числа, причем $|z_0| < 1$.

Итак, мы доказали такое утверждение.

Предложение 6.2. *Группа автоморфизмов единичного круга состоит из дробно-линейных преобразований вида*

$$z' = e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \tag{6.5}$$

где θ действительно и $|z_0| < 1$.

§ 3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

1. Формулировка основной теоремы. Представим себе такую задачу. Пусть дана область D в плоскости $\mathbf{C}$; найти все изоморфизмы (если они существуют) области D на единичный круг. Следующее условие необходимо для существования такого изоморфизма: *необходимо, чтобы область D была односвязна и отлична от* $\mathbf{C}$.

Первое условие необходимо, поскольку область D должна быть гомеоморфна открытому кругу, который односвязен. Условие $D \neq \mathbf{C}$ необходимо, в силу теоремы 1 из § 2, п. 1. Основная теорема теории конформных отображений утверждает, что эти условия являются также достаточными.

Основная теорема. *Всякая область D в плоскости* $\mathbf{C}$, *односвязная и не совпадающая с* $\mathbf{C}$, *изоморфна открытому кругу $|z| < 1$.*

Доказательство этой теоремы содержится в п. 3 и 4. Сначала заметим, что все изоморфизмы области D на круг $|z| < 1$ могут быть представлены в виде композиций какого-нибудь одного изоморфизма и всевозможных автоморфизмов единичного круга. Но автоморфизмы единичного круга представляют собой транзитивную группу. Поэтому если существует хотя бы один изоморфизм области D на круг $|z| < 1$, то существует и изоморфизм, переводящий в центр круга произвольную наперед заданную точку $z_0 \in D$. Поэтому искомый изоморфизм f можно подчинить условию

$$f(z_0) = 0. \tag{1.1}$$

Далее, группа изотропии центра круга состоит из вращений вокруг точки 0 (§ 2, предложение 6.1). Поэтому можно наложить на изоморфизм f дополнительное условие:

$$f'(z_0) > 0. \qquad (1.2)$$

Условия (1.1) и (1.2) однозначно определяют искомый изоморфизм f (если он существует).

Укажем два следствия из основной теоремы.

Следствие 1. *Любые две односвязные области D_1 и D_2 в плоскости* **C**, *отличные от* **C**, *изоморфны.*

Заметим, что, в силу теоремы 1 из § 2 (п. 1), односвязная область D, отличная от **C**, не изоморфна **C**. Однако справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Любые две односвязные области D_1 и D_2 в плоскости* **C** *гомеоморфны.*

Действительно, если они отличны от **C**, то это вытекает из следствия 1; если же одна из них равна **C**, то это вытекает из того, что круг $|z| < 1$ *гомеоморфен* плоскости **C**.

2. Сведение к случаю ограниченной области.

Предложение 2.1. *Пусть D — область, удовлетворяющая предположениям основной теоремы. Тогда существует изоморфизм области D на некоторую ограниченную область плоскости* **C**.

В самом деле, по предположению, существует точка $a \notin D$. Рассмотрим функцию $\log(z - a)$. Так как область D односвязна, можно выбрать непрерывную ветвь $g(z)$ этой функции в этой области (см. гл. II, § 1, п. 7). Функция g голоморфна в области D и однолистна в ней, так как из того, что $g(z_1) = g(z_2)$, следует, что $e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)}$, т. е. $z_1 - a = z_2 - a$.

Выберем в области D точку z_0. Функция g принимает в области D все значения, лежащие в некотором круге E с центром в точке $g(z_0)$ (см. § 1, п. 1). Если параллельно перенести этот круг на $2\pi i$, то получится круг, ни одна точка которого не принадлежит образу D при отображении g. Это вытекает из однолистности функции g. Следовательно, функция

$$\frac{1}{g(z) - g(z_0) - 2\pi i}$$

голоморфна, однолистна и *ограничена* в D. Поэтому она определяет изоморфизм области D на ограниченную область в плоскости $\mathbf{C}$. Предложение 2.1 доказано.

Мы будем считать в дальнейшем, что D — *ограниченная* область. Произведя в случае надобности параллельный перенос и преобразование подобия, мы можем добиться того, чтобы область D содержалась в круге $|z| < 1$ и чтобы точка 0 была ее внутренней точкой. Будем в дальнейшем считать, что область D обладает и этим свойством.

3. Экстремальное свойство.

Предложение 3.1. *Пусть A — множество функций f, голоморфных и однолистных в области D, удовлетворяющих следующим двум условиям:*

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| < 1 \quad \textit{при} \quad z \in D. \tag{3.1}$$

Пусть f_0 — некоторая функция из множества A. Тогда, для того чтобы образом области D при отображении f_0 был единичный круг, необходимо и достаточно, чтобы для любой другой функции f из множества A выполнялось неравенство

$$|f_0'(0)| \geqslant |f'(0)|,$$

т. е. чтобы выражение $|f'(0)|$ достигало своего наибольшего значения при $f = f_0$.

Доказательство. 1. Условие необходимо. В самом деле, пусть $f \in A$, D' — образ области D при отображении f и $f_0 \in A$ — изоморфизм области D на единичный круг ($f_0(0) = 0$). Отображение f может быть представлено в виде композиции $h \circ f_0$, где h — изоморфизм единичного круга на область D', причем $h(0) = 0$. В силу неравенства Коши, $|h'(0)| \leqslant 1$, причем равенство возможно только в том случае, когда h — автоморфизм круга. Следовательно,

$$|f'(0)| \leqslant |f_0'(0)|,$$

причем равенство возможно, только если f также изоморфизм области D на единичный круг.

2. Условие достаточно. В самом деле, пусть $f \in A$ и существует точка a ($|a| < 1$), которая не принадлежит

образу f. Мы покажем, что существует функция $g \in A$, такая, что

$$|g'(0)| > |f'(0)|.$$

Сначала мы рассмотрим функцию

$$F(z) = \log \frac{f(z) - a}{1 - \bar{a} f(z)}, \tag{3.2}$$

голоморфную и однолистную в D. Поскольку значения функции $f(z)$ лежат в единичном круге, значения функции $\frac{f(z) - a}{1 - \bar{a} f(z)}$ также лежат в единичном круге (см. предложение 6.2 из § 2) и, следовательно, действительная часть функции $F(z)$ отрицательна. Разумеется, в качестве $F(z)$ взята непрерывная ветвь логарифма, выбор которой возможен, так как область D односвязна. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}}, \tag{3.3}$$

голоморфную и однолистную в D. Очевидно, $g(0) = 0$. Кроме того, $|g(z)| < 1$, в силу следующей леммы.

Лемма. *Пусть u и v — два комплексных числа, действительные части которых отрицательны; тогда* $\left|\frac{v - u}{v + \bar{u}}\right| < 1$.

(Доказательство этой леммы предоставляется читателю.)

Таким образом, функция g принадлежит множеству A. Вычислим производную функции g в точке 0:

$$g'(0) = \frac{F'(0)}{F(0) + \overline{F(0)}} \quad \text{и} \quad F'(0) = \left(\bar{a} - \frac{1}{a}\right) f'(0). \tag{3.4}$$

Следовательно,

$$\frac{|g'(0)|}{|f'(0)|} = \frac{1 - a\bar{a}}{2\,|a| \log \left|\frac{1}{a}\right|}. \tag{3.5}$$

Для доказательства того, что $|g'(0)| > |f'(0)|$, достаточно проверить неравенство

$$\frac{1 - t^2}{t} - 2 \log \frac{1}{t} > 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < 1. \tag{3.6}$$

Эта проверка элементарна. Левая часть представляет собой функцию, производная которой отрицательна; следовательно, эта функция строго убывает на интервале $0 < t \leqslant 1$. Но при $t = 1$ она равна нулю; следовательно, она положительна при $0 < t < 1$.

Доказательство предложения 3.1, таким образом, закончено.

4. Доказательство основной теоремы. В силу предложения 3.1, нам достаточно доказать, что существует функция $f \in A$, на которой достигается максимум величины $|f'(0)|$.

Пусть B—множество функций $f \in A$, таких, что $|f'(0)| \geqslant 1$. Множество B *непусто*, поскольку ему принадлежит функция $f(z) = z$. Множество B *ограничено* в векторном пространстве $\mathscr{H}(D)$ (см. гл. V, § 4, п. 1); это следует из того, что $|f(z)| < 1$ при $z \in D$ для любой функции $f \in B$.

Покажем, что B — *замкнутое* подмножество пространства $\mathscr{H}(D)$. Пусть f — функция, голоморфная в области D, которая является пределом последовательности функций $f_n \in B$, равномерно сходящейся на любом компакте в области D. Тогда

$$f(0) = \lim_{n \to \infty} f_n(0) = 0.$$

Далее, последовательность производных f'_n сходится равномерно на любом компакте в области D к функции f'. В частности, $|f'(0)| = \lim\limits_{n \to \infty} |f'_n(0)| \geqslant 1$. Таким образом, функция f не является константой в области D. В то же время f есть предел последовательности функций f_n, однолистных в области D. Поэтому функция f также однолистна в этой области (см. гл. V, § 1, предложение 2.2).

Так как $|f_n(z)| < 1$ в любой точке $z \in D$, то $|f(z)| \leqslant 1$. Но равенство $|f(z)| = 1$ не может выполняться ни в одной точке $z \in D$, в силу принципа максимума, поскольку функция f не является константой.

Итак, мы доказали, что функция f удовлетворяет всем условиям, наложенным на элементы множества B. Иначе говоря, $f \in B$ и множество B, таким образом, замкнуто в $\mathscr{H}(D)$. Значит, множество B есть замкнутое ограниченное подмножество пространства $\mathscr{H}(D)$. В силу основной теоремы гл. V (§ 4, п. 2), множество B *компактно*.

Далее, отображение, сопоставляющее каждой функции $f \in B$ действительное число $|f'(0)|$, непрерывно (см. гл. V, § 1, п. 1, теорема 2). Известно, что непрерывная функция на компактном пространстве достигает своего наибольшего значения. Поэтому существует функция $f \in B$, на которой выражение $|f'(0)|$ достигает своего максимума.

Основная теорема полностью доказана.

§ 4. ПОНЯТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

1. Структура аналитического пространства. Пусть X — *хаусдорфово* пространство. Пусть $(U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие пространства X. Предположим, что каждому U_i сопоставлена комплекснозначная функция z_i, определенная в U_i, которая осуществляет *гомеоморфизм* U_i на открытое множество A_i плоскости $\mathbf{C}$, причем эти функции удовлетворяют следующему условию согласованности.

(1.1) *Каковы бы ни были $i \in I$ и $j \in I$, такие, что $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, отображение $f_{ij} = z_i \circ (z_j)^{-1}$ образа $z_j(U_i \cap U_j) \subset A_j$ на образ $z_i(U_i \cap U_j) \subset A_i$. есть голоморфное отображение, производная которого всюду отлична от нуля.*

Иными словами, в пересечении $U_i \cap U_j$ имеет место равенство $z_i = f_{ij}(z_j)$, где f_{ij} — функция, голоморфная в области $z_j(U_i \cap U_j)$ плоскости $\mathbf{C}$, производная которой не обращается в нуль.

Говорят, что совокупность открытого покрытия и функций z_i, удовлетворяющих условию (1.1), определяет на X *структуру аналитического пространства*. Функция z_i называется *локальной координатой* в области U_i. Если точка X принадлежит одновременно нескольким областям U_i, то в окрестности этой точки определены несколько локальных координат (по одной для каждой области покрытия); переход от одной локальной координаты z_i к другой локальной координате z_j, в силу условия (1.1), осуществляется с помощью *голоморфного* отображения f_{ij}.

Пример такой структуры уже рассматривался при изучении *сферы Римана* (гл. III, § 5, п. 1). В этом случае пространство X есть единичная сфера в пространстве $\mathbf{R}^3$, покрытие состоит из двух открытых множеств, каждое из которых есть дополнение к одному из полюсов сферы.

Определение голоморфной функции. Пусть X — пространство, снабженное структурой аналитического пространства. Пусть f — комплекснозначная функция, определенная и непрерывная на X. Для каждого i пусть f_i — функция, определенная в области $A_i \subset \mathbf{C}$, такая, что в окрестности U_i выполняется условие $f = f_i \circ z_i$. Говорят, что функция f *голоморфна*, если при любом i функция f_i голоморфна в области A_i. Иначе говоря, функция f голоморфна в X, если она является голоморфной функцией локальной координаты z_i в окрестности U_i для каждого i.

2. Голоморфные отображения. Индуцированная структура.

Определение. Пусть X и Y — два пространства, снабженные структурой аналитических пространств. Говорят, что отображение $\varphi : X \to Y$ есть голоморфное отображение, если оно непрерывно и удовлетворяет, кроме того, следующему условию: пусть a — некоторая точка из X, $b = \varphi(a)$ — ее образ и w — локальная координата в окрестности точки b пространства Y; тогда $w \circ \varphi$ есть голоморфная функция в окрестности точки a пространства X. Это условие означает, что $w \circ \varphi$ является голоморфной функцией любой локальной координаты в окрестности точки a.

Таким образом, непрерывное отображение φ голоморфно, если для любой точки $a \in X$ локальная координата в окрестности точки $b = \varphi(a)$ есть голоморфная функция локальной координаты в окрестности точки a. В силу условия согласованности (1.1), последнее условие не зависит от выбора локальной координаты.

Пусть X, Y и Z — три аналитических пространства, φ: $X \to Y$ и ψ: $Y \to Z$ — два голоморфных отображения. Тогда их композиция $\psi \circ \varphi$ является голоморфным отображением пространства X в пространство Z. Доказательство этого утверждения предоставляется читателю.

Пусть X и Y — два аналитических пространства. Назовем *изоморфизмом* пространства X на пространство Y такой гомеоморфизм φ: $X \to Y$, что как он сам, так и обратный гомеоморфизм φ^{-1} являются голоморфными отображениями. Как мы увидим несколько позже (предложение 6.1), если φ — *голоморфный гомеоморфизм*, то обратное отображение автоматически является голоморфным и, следовательно, отображение φ есть изоморфизм.

Пусть на одном и том же топологическом пространстве X заданы две аналитические структуры: первая определяется с помощью открытого покрытия $\{U_i\}$ и локальных координат z_i, вторая — открытого покрытия $\{V_\alpha\}$ и локальных координат w_α. Потребуем, чтобы тождественное отображение $X \to X$ являлось изоморфизмом первой структуры на вторую. Необходимое и достаточное условие для этого вытекает непосредственно из определения аналитического пространства. Оно состоит в том, что в окрестности любой точки $a \in X$ каждая из локальных координат z_i первой структуры является голоморфной функцией координат w_α второй структуры, и наоборот, каждая из локальных координат второй структуры является голоморфной функцией локальных координат первой структуры. Это условие можно сформулировать по-другому следующим образом.

Рассмотрим открытое покрытие пространства X, состоящее из всех элементов U_i первого покрытия и всех элементов V_α второго покрытия с локальными координатами соответственно z_i и w_α. Тогда наше условие состоит в том, что эти локальные координаты в совокупности удовлетворяют условию согласованности (1.1), т. е. определяют на X структуру аналитического пространства (которая, очевидно, изоморфна обеим первоначальным структурам). Две структуры аналитического пространства, удовлетворяющие этому условию, называются *эквивалентными*. *Аналитическим пространством* называется топологическое пространство X, на котором задан класс попарно эквивалентных аналитических структур.

Определение. Пусть X — топологическое пространство, снабженное структурой аналитического пространства, определенной с помощью окрестностей U_i и координат z_i; U — открытое множество в X. Назовем *аналитической структурой, индуцированной* на U, структуру, определенную с помощью окрестностей $U \cap U_i$ и координат z'_i, где z'_i — сужение функции z_i на множество $U \cap U_i$.

Иными словами, если $a \in U$, локальные координаты в окрестности точки a в индуцированной структуре те же, что и локальные координаты в окрестности точки a в данной структуре на X. Таким образом, любое открытое множество в аналитическом пространстве автоматически снабжается структурой аналитического пространства.

3. Примеры аналитических пространств. Пусть $\mathbf{C}$ — плоскость комплексного переменного z. Рассмотрим покрытие этой плоскости, состоящее из единственной окрестности, совпадающей со всей плоскостью; функцию z будем рассматривать как локальную координату в $\mathbf{C}$. Тем самым на плоскости $\mathbf{C}$ определена структура аналитического пространства [условие согласованности (1.1) очевидно выполняется]. Как было замечено в конце п. 2, любое открытое множество $D \subset \mathbf{C}$ автоматически снабжается структурой аналитического пространства. Функции, голоморфные в аналитическом пространстве D в смысле этого определения, есть просто функции, которые мы всегда называли голоморфными в области D.

Другим примером аналитического пространства является уже упоминавшаяся сфера Римана (гл. III, § 5, п. 1).

Теперь рассмотрим факторпространство $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ плоскости $\mathbf{C}$ по аддитивной подгруппе, состоящей из действительных точек с целыми координатами. Точка пространства $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ есть, таким образом, класс смежности, состоящий из точек, попарные разности которых являются целыми действительными числами. В соответствии с общими определениями топологии, в пространстве $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ вводится *фактортопология* топологии в плоскости $\mathbf{C}$. Множество $A \subset \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ называется *открытым*, если его полный прообраз в $\mathbf{C}$ при каноническом отображении $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ есть открытое множество. Иными словами, открытые множества в $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ представляют собой образы открытых множеств из $\mathbf{C}$ при каноническом отображении $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$.

Очень легко показать, что в этой топологии пространство $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ является хаусдорфовым. Для того чтобы определить структуру аналитического пространства на $X = \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, рассмотрим открытые множества V в плоскости $\mathbf{C}$, настолько малые, что сужение на V канонического отображения $p: \mathbf{C} \to X$ взаимно однозначно (например, области V имеют диаметр меньше 1). Обозначим через z координату в плоскости $\mathbf{C}$ и рассмотрим пару, состоящую из открытого множества $U = p(V) \subset X$ и функции $z \circ p^{-1}$, определенной в этом открытом множестве. Мы покажем, что эти пары определяют на X структуру аналитического пространства. Достаточно убедиться в том, что выполнено условие согласованности. В самом деле, пусть V_1 и V_2 — два достаточно малых открытых множества из $\mathbf{C}$, причем их образы $U_1 = p(V_1)$ и $U_2 = p(V_2)$ пересекаются. Обозначим через p_i сужение p на V_i $(i = 1, 2)$ и положим

$$V'_i = p_i^{-1}(U_1 \cap U_2) \subset V_i \qquad (i = 1, 2).$$

Условие согласованности состоит в том, что отображение $f_{12} = p_1^{-1} \circ p_2$ голоморфно и имеет производную, не обращающуюся в нуль. Ясно, однако, что z и $f_{12}(z)$ имеют в X один и тот же образ для любой точки $z \in V'_2$. Отсюда следует, что в окрестности любой точки $z \in V'_2$ величина $f_{12}(z) - z$ есть целочисленная константа.

Еще один пример аналитического пространства можно получить, рассматривая, как в п. 5 § 2 гл. V, дискретную подгруппу $\Omega \subset \mathbf{C}$, имеющую в качестве базы два вектора e_1 и e_2, отношение которых не является вещественным. Пусть X есть факторпространство $\mathbf{C}/\Omega$, снабженное фактортопологией топологии $\mathbf{C}$; открытыми множествами в X являются образы открытых множеств из $\mathbf{C}$ при каноническом отображении $p: \mathbf{C} \to \mathbf{C}/\Omega$. Пространство X является хаусдорфовым, и структура аналитического пространства определяется на X точно так же, как и в предыдущем случае. Однако, в отличие от предыдущего случая, *пространство* $X = \mathbf{C}/\Omega$ *компактно.*

В самом деле, пусть P — параллелограмм периодов; очевидно, P — компактное подмножество плоскости $\mathbf{C}$, и поэтому его образ при отображении p есть компактное подмножество X. Но его образ представляет собой все пространство X и, следовательно, X компактно.

Таким образом, мы построили пример компактного аналитического пространства, отличный от уже известного примера сферы Римана.

4. Принцип аналитического продолжения. Принцип максимума. Принцип аналитического продолжения (гл. I,

§ 4, п. 3, следствие 2) может быть распространен на функции, голоморфные на аналитическом пространстве, и даже на голоморфные отображения аналитического пространства X в аналитическое пространство X'. Точнее говоря, если D — непустое открытое множество в *связном* аналитическом пространстве X, то любые два голоморфных отображения f и g пространства X в пространство X', совпадающие на D, *совпадают на всем пространстве* X. Это вытекает, очевидно, из следующего утверждения.

Предложение 4.1. *Пусть f и g — два голоморфных отображения аналитического пространства X в аналитическое пространство X'; U — множество точек пространства X, таких, что в достаточно малой окрестности каждой из них отображения f и g совпадают. Тогда множество U открыто и замкнуто в пространстве X.*

Доказательство. Множество U открыто по определению, и, следовательно, достаточно показать, что оно замкнуто. Пусть $a \in X$ — некоторая предельная точка множества U. Так как f и g непрерывны и совпадают в U, то $f(a) = g(a)$. Выберем в некоторой окрестности точки a локальную координату z в пространстве X, которая равна нулю в точке a; в окрестности точки $f(a)$ выберем локальную координату w в пространстве X'. В окрестности точки a функции $w \circ f$ и $w \circ g$ являются функциями переменного z, голоморфными в некоторой окрестности V точки $z = 0$.

Обозначим $w \circ f = \varphi(z)$, $w \circ g = \psi(z)$. Согласно классическому принципу аналитического продолжения, множество E точек $z \in V$, в окрестности которых функции φ и ψ совпадают, замкнуто. Так как точка $z = 0$ является предельной для множества E, то $0 \in E$.

Таким образом, функции φ и ψ совпадают в окрестности точки 0 и, следовательно, отображения f и g совпадают в окрестности точки $a \in X$. Отсюда $a \in U$, что и требовалось.

Предложение 4.2 (принцип максимума). *Пусть f — функция, голоморфная на связном аналитическом пространстве X. Если некоторая точка $a \in X$ является точкой локального максимума для функции $|f|$, то функция f постоянна на X.*

Доказательство. Рассмотрим локальную координату z в окрестности точки a. Функция f может быть представлена в этой окрестности как голоморфная функция переменного z. Поскольку точка a является точкой локального максимума для функции $|f|$, в силу классического принципа максимума функция f постоянна в окрестности точки a (см. гл. III, § 2, п. 2, теорема 1).

Рассуждая обычным образом, мы получаем, что множество тех точек, в окрестности которых функция f принимает значение $f(a)$, открыто и замкнуто в X. В силу связности пространства X, оно совпадает со всем X. Предложение доказано.

Следствие. *Пусть X — связное компактное аналитическое пространство. Тогда всякая функция, голоморфная на X, постоянна.*

В самом деле, $|f|$ есть непрерывная функция на компактном пространстве. Следовательно, она достигает на этом пространстве своей верхней грани. В силу предложения 4.2, функция f постоянна на пространстве X.

Примеры. Сфера Римана $\mathbf{S}_2$, пространство $\mathbf{C}/\Omega$ (см. п. 3) являются связными компактными аналитическими пространствами. Следовательно, всякая функция, голоморфная на одном из этих пространств, постоянна. Заметим, что отображение $f \to f \circ p$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями, голоморфными на $\mathbf{C}/\Omega$, и функциями, голоморфными на $\mathbf{C}$, для которых группа Ω является группой периодов. Мы получаем теорему, уже доказанную нами другим методом.

Всякая двоякопериодическая функция, голоморфная в плоскости $\mathbf{C}$, постоянна (см. гл. III, п. 5, следствие из предложения 5.1).

5. Мероморфные функции на аналитическом пространстве.

Определение. Пусть X — аналитическое пространство. Назовем *мероморфной функцией* на пространстве X голоморфное отображение пространства X в сферу Римана $\mathbf{S}_2$.

Таким образом, мероморфная функция есть не что иное, как непрерывная функция, которая может принимать значение ∞ и которая в окрестности каждой точки $a \in X$

может быть представлена как мероморфная функция локальной координаты.

Пусть Ω — дискретная подгруппа группы $\mathbf{C}$, порожденная двумя элементами e_1 и e_2, отношение которых не является вещественным. Каноническое отображение $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\Omega$ устанавливает, очевидно, взаимно однозначное соответствие между мероморфными функциями на аналитическом пространстве $\mathbf{C}/\Omega$ и двоякопериодическими мероморфными функциями на плоскости $\mathbf{C}$, для которых группа Ω является группой периодов.

6. Индекс ветвления голоморфного отображения. Пусть φ: $X \to Y$ — *голоморфное* отображение аналитического пространства X в аналитическое пространство Y, и пусть a — некоторая точка пространства X. Пусть z — локальная координата на X в окрестности точки a и w — локальная координата на Y в окрестности точки $b = \varphi(a)$. Так как функция φ голоморфна, то функция $w(\varphi(x))$ для значений x, лежащих в некоторой окрестности точки a, может быть представлена как голоморфная функция $f(z)$ локальной координаты z. Предположим для определенности, что координата z обращается в нуль в точке a и координата w обращается в нуль в точке b.

Пусть уравнение $f(z) = 0$ имеет в точке $z = 0$ корень кратности p. Ясно, что число p не зависит ни от выбора локальной координаты z в окрестности точки a, ни от выбора локальной координаты w в окрестности точки b. Это вытекает из того, что изменение локальной координаты производится с помощью голоморфной функции с отличной от нуля производной.

Определенное таким образом целое число p называется *индексом ветвления* отображения φ: $X \to Y$ в точке $a \in X$. В силу п. 1 и 2 из § 1, существуют локальная координата z в окрестности точки a и локальная координата w в окрестности точки b, такие, что отображение φ задается в этих координатах соотношением $w = z^p$.

Обратно, если отображение φ в каких-нибудь координатах определяется с помощью этой формулы, то индекс ветвления отображения φ в точке a равен p.

Заметим, что функция φ принимает в окрестности точки a всякое значение, достаточно близкое к b, ровно p раз.

В частности, *для того чтобы сужение отображения* φ *на достаточно малую окрестность точки* a *было гомеоморфизмом этой окрестности на ее образ* (иначе говоря, для того чтобы отображение φ было *локально однолистным* в окрестности точки a), *необходимо и достаточно, чтобы индекс ветвления отображения* φ *в точке* a *равнялся* 1. Такое отображение называется *неразветвленным* в точке a.

Предложение 6.1. *Всякое голоморфное однолистное отображение аналитического пространства* X *на аналитическое пространство* Y *есть изоморфизм.*

Действительно, индекс ветвления такого отображения, как было только что замечено, должен равняться единице во всех точках $a \in X$.

Пусть $b = \varphi(a)$; выразив локальную координату z, определенную в окрестности точки a, как голоморфную функцию локальной координаты w, определенной в окрестности точки b, мы зададим в окрестности точки b отображение φ^{-1}, обратное отображению φ. Предложение доказано.

Пример. Рассмотрим голоморфное отображение $z \to e^{2\pi i z}$ аддитивной группы $\mathbf{C}$ комплексных чисел на мультипликативную группу $\mathbf{C}^*$ комплексных чисел, отличных от нуля. Это отображение индуцирует голоморфное отображение φ аналитического пространства $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ на аналитическое пространство $\mathbf{C}^*$.

Легко заметить, что это отображение голоморфно и однолистно. Следовательно, отображение φ есть *изоморфизм* пространства $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ на пространство $\mathbf{C}^*$. Как мы видели в § 3, гл. I, это отображение является также изоморфизмом топологических групп $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ и $\mathbf{C}^*$.

7. Основная теорема о конформном отображении. Мы приведем (без доказательства) теорему, обобщающую на случай аналитических пространств основную теорему, сформулированную и доказанную в § 3 для областей в плоскости $\mathbf{C}$.

Основная теорема. *Всякое односвязное аналитическое пространство* X *изоморфно одному из трех следующих пространств*:

1) *сфере Римана* S_2;
2) *плоскости* C;
3) *единичному кругу* $|z| < 1$.

Доказательство этой теоремы слишком сложно, и мы не будем приводить его здесь. Заметим, что из трех приведенных выше пространств компактным является только S_2. Отсюда вытекает такое следствие.

Следствие. *Всякое компактное односвязное аналитическое пространство изоморфно сфере Римана. Всякое некомпактное односвязное аналитическое пространство изоморфно плоскости* C *или единичному кругу.* (Эти два случая исключают друг друга.)

8. Интегрирование дифференциальных форм и теорема о вычетах.

Определение голоморфной дифференциальной формы на аналитическом пространстве X. Говорят, что на аналитическом пространстве X задана голоморфная дифференциальная форма, если в каждом открытом множестве U_i, в котором определена локальная координата z_i, задана дифференциальная голоморфная форма

$$\omega_i = f_i(z_i)\,dz_i,$$

где f_i — функция, голоморфная в открытом множестве $A_i \subset C$ — образе множества U_i относительно локальной координаты z_i, причем выполняется следующее условие согласованности: если z_i и z_j — две локальные координаты в окрестности одной и той же точки $a \in X$, то дифференциальная форма ω_j переходит в дифференциальную форму ω_i при замене переменной

$$z_i = f_{ij}(z_j), \tag{8.1}$$

где функции f_{ij} — те же, что и в § 4, п. 1. Иначе говоря, имеет место равенство

$$f_j(z_j) = f_i(f_{ij}(z_j))\, f'_{ij}(z_j). \tag{8.2}$$

Мы покажем, не приводя доказательств, как теория голоморфных дифференциальных форм в области плоскости **C** может быть обобщена на случай голоморфных дифференциальных форм на аналитическом пространстве.

Пусть ω — голоморфная дифференциальная форма на аналитическом пространстве X. В окрестности каждой точки пространства X существует *примитивная* формы ω, т. е. голоморфная функция g, такая, что $dg = \omega$. Она определена с точностью до аддитивной постоянной. *Глобальной* примитивной, определенной на всем пространстве X, может и не быть. Однако если X односвязно, то для любой голоморфной дифференциальной формы на X существует примитивная. В общем случае, если X не односвязно, интеграл формы ω вдоль замкнутого пути на X не обязательно равен нулю. Этот интеграл принимает одно и то же значение на *гомотопных* путях (в смысле п. 6 § 1 гл. II). Значение интеграла по такому замкнутому пути называется тогда *периодом* интеграла $\int \omega$.

Пусть X — аналитическое пространство. В окрестности каждой точки $a \in X$ имеется некоторая *ориентация*, как так любая локальная координата, определенная в окрестности точки a, осуществляет гомеоморфизм окрестности точки a на открытое множество в плоскости **C**, который естественным образом ориентирован. Две локальные координаты в окрестности одной и той же точки a определяют одну и ту же ориентацию, так как переход от одной локальной координаты к другой осуществляется с помощью голоморфного преобразования. Это позволяет ввести понятие «ориентированной границы компакта», содержащегося в X.

Если Γ — ориентированная граница некоторого компакта, то интеграл $\int_\Gamma \omega$ равен нулю для любой голоморфной дифференциальной формы ω.

Теперь мы определим *понятие вычета* голоморфной дифференциальной формы. Пусть E — замкнутое дискретное подмножество аналитического пространства X (т. е. E состоит из *изолированных* точек), ω — дифференциальная голоморфная форма в дополнении к множеству E. Пусть далее a — точка из E, z — локальная координата в окрестности точки a, обращающаяся в нуль в точке a. В окрестности точки a форма ω может быть представлена в виде

$f(z)\,dz$, где f — функция, голоморфная в окрестности точки 0, за исключением, возможно, самой точки 0.

Разлагая функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки a, получаем

$$\omega = \omega_1 + \left(\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots\right) dz, \tag{8.3}$$

где ω_1 — дифференциальная форма, голоморфная в окрестности точки a (включая точку a).

Пусть γ — замкнутый путь, расположенный в малой окрестности точки a, не проходящий через точку a, индекс которого по отношению к a равен единице (индекс замкнутого пути в окрестности точки $a \in X$ определяют, рассматривая образ окрестности точки a в плоскости $\mathbf{C}$ относительно локальной координаты). Из классической теоремы о вычетах получаем, что

$$\int_\gamma \omega = 2\pi i c_1. \tag{8.4}$$

Таким образом, коэффициент c_1, который фигурирует в правой части равенства (8.3), не зависит от выбора локальной координаты z, обращающейся в нуль в точке a. Этот коэффициент называется *вычетом* дифференциальной формы ω в точке a.

Исходя из этого определения и рассуждая точно так же, как в п. 5 § 2 гл. III, мы получаем следующую теорему.

Теорема о вычетах. *Если ориентированная граница Γ компакта K не содержит ни одной точки замкнутого дискретного множества E, в дополнении к которому дифференциальная форма ω голоморфна, то интеграл $\int_\Gamma \omega$ равен произведению числа $2\pi i$ на сумму вычетов формы ω в точках множества E, расположенных в K.*

§ 5. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

1. Определения.

Определение. Пусть Y — аналитическое пространство. Назовем *римановой поверхностью над Y* совокупность *связного* аналитического пространства X и голоморфного отображения $\varphi: X \to Y$ (φ *не является константой*).

Чаще всего рассматривают случай, когда Y есть плоскость $\mathbf{C}$ комплексного переменного или сфера Римана S_2. Иначе говоря, речь идет о римановых поверхностях над плоскостью или над сферой.

Мы видели в п. 6 § 4, как устроено отображение φ в окрестности точки $a \in X$.

Если индекс ветвления отображения φ в точке a равен 1, то отображение φ устанавливает гомеоморфизм окрестности точки a на окрестность точки $\varphi(a)$; если же индекс ветвления отображения φ в точке a равен целому числу $p > 1$, то образ при отображении φ малой окрестности точки a покрывает p раз окрестность точки $\varphi(a)$. При этом *точки ветвления* отображения φ (т. е. те точки, в которых индекс ветвления больше 1) представляют собой *изолированные* точки пространства X. Отображение φ всегда является *открытым* отображением, и полный прообраз любой точки пространства Y есть *дискретное подмножество* пространства X. Разумеется, даже в том случае, когда точки ветвления отсутствуют, отображение φ может не быть взаимно однозначным. В случае же, когда точки ветвления имеются, образ дискретного множества точек ветвления составляет не обязательно дискретное подмножество Y. Это возможно, конечно, только тогда, когда как множество точек ветвления в X, так и его образ в Y представляют собой бесконечные множества.

Определение. Назовем *неразветвленной римановой поверхностью* над Y такую риманову поверхность (X, φ), для которой φ — неразветвленное отображение, т. е. индекс ветвления этого отображения в каждой точке равен единице.

Для того чтобы определить неразветвленную риманову поверхность над Y, достаточно задать *хаусдорфово* топологическое пространство X и непрерывное отображение $\varphi: X \to Y$, которое представляет собой *локальный гомеоморфизм* (это означает, что для каждой точки пространства X существует окрестность V, такая, что сужение отображения φ на множество V есть гомеоморфизм множества V на его образ $\varphi(V)$). В самом деле, в этом случае в окрестности каждой точки пространства X отображение φ определяет *локальную координату*. Пространство X, таким образом, снабжается структурой аналитического пространства, и отображение φ является, очевидно, голоморфным отображением X на Y. Частный случай неразветвленной римановой поверхности над Y представляет собой так называемое *накрытие* над Y.

Определение. Назовем *накрытием* над Y неразветвленную риманову поверхность (X, φ), удовлетворяющую следующему условию:

Для всякой точки $b \in Y$ существует открытая окрестность V этой точки, такая, что ее полный прообраз $\varphi^{-1}(V)$ состоит из попарно непересекающихся окрестностей U_i пространства X, каждая из которых при отображении φ отображается гомеоморфно на V.

Пример. Пусть $Y = \mathbf{C}^*$ — дополнение к точке 0 в плоскости $\mathbf{C}$. Положим $X = \mathbf{C}$ и зададим отображение $\varphi : X \to Y$ по формуле $z = e^t$. Риманова поверхность (X, φ) является накрытием над Y.

В самом деле, пусть b — комплексное число, отличное от нуля. В качестве окрестности V возьмем открытый круг с центром в точке b, радиус которого меньше $|b|$. Каждая непрерывная ветвь функции $\log z$ на множестве V является функцией, которая определяет гомеоморфизм окрестности V на открытое множество U_i в плоскости $\mathbf{C}$. Эти открытые множества U_i попарно не пересекаются; их объединение равно $\varphi^{-1}(V)$, и сужение отображения φ на каждое из множеств U_i является гомеоморфизмом этого множества на V.

В рассмотренном примере пространство $Y = \mathbf{C}^*$ неодносвязно; однако его накрытие $\mathbf{C}$ односвязно. Отметим без доказательства такую теорему.

Теорема. *Всякое связное открытое множество в плоскости $\mathbf{C}$ (и вообще всякое связное аналитическое пространство Y) обладает односвязным накрытием.*

2. Голоморфные функции и голоморфные дифференциальные формы на римановой поверхности.

Определение. Пусть дана риманова поверхность (X, φ) над пространством Y. *Голоморфной* (соответственно *мероморфной) функцией* над этой римановой поверхностью называется просто голоморфная (соответственно мероморфная) функция над аналитическим пространством X. Точно так же определяется и голоморфная дифференциальная форма над римановой поверхностью.

Рассмотрим, например, риманову поверхность, определенную в конце п. 1: $X = \mathbf{C}$ (комплексное переменное обозначается буквой t); $Y = \mathbf{C}^*$ (комплексное переменное обозначается буквой z); отображение φ определяется формулой $z = e^t$.

Так как отображене φ является неразветвленным, то в качестве локальной координаты в окрестности любой точки пространства X можно взять функцию $z = e^t$; тогда всякая функция f, голоморфная на римановой поверхности, *локально* может быть представлена как голоморфная функция переменного z. Но так как различные точки из X могут переходить при отображении φ в одну и ту же точку из Y, функция f, вообще говоря, не является глобально голоморфной (однолистной) функцией переменного $z \neq 0$. В частности, t есть функция, голоморфная на X. В окрестности каждой точки z функция t является непрерывной ветвью логарифма. Однако если функцию $\log z$ считать функцией переменного z, то она не является однозначной на $\mathbf{C}^*$.

Можно сказать, что мы рассматриваем накрытие φ: $X \to Y$, чтобы *превратить функцию* $\log z$ *в однозначную функцию*: вместо того чтобы считать ее функцией на $\mathbf{C}^*$, мы считаем ее функцией на односвязном накрытии (X, φ) пространства $\mathbf{C}^*$.

Возможны и другие случаи, когда, для того чтобы многозначную функцию «превратить» в однозначную, удобно рассматривать риманову поверхность. Не обсуждая пока общего случая, рассмотрим следующий пример. Пусть

$$y = (1 - x^3)^{1/3};$$

это — многозначная функция в плоскости $\mathbf{C}$. В каждой точке плоскости, кроме точек 1, j и j^2 (кубические корни из единицы), величина y принимает три различных значения; если же x принимает одно из значений 1, j или j^2, то эти три значения y сливаются в одно, равное нулю.

Требуется определить аналитическое пространство X и голоморфное отображение φ: $X \to \mathbf{C}$ таким образом, чтобы функция y была однозначной функцией на пространстве X.

Пусть $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ — пространство, точками которого являются пары (x, y) комплексных чисел. Рассмотрим в этом пространстве подмножество X, состоящее из таких пар (x, y), для которых

$$x^3 + y^3 = 1. \tag{2.1}$$

Топология пространства $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ индуцирует топологию в X. В этой топологии X является хаусдорфовым топологическим пространством.

Рассмотрим две функции на этом пространстве: x — первую координату точки (x, y) и y — вторую координату. Для того чтобы определить на X структуру аналитического пространства, нужно задать в окрестности каждой точки множества X локальную координату. Пусть $(x_0, y_0) \in X$. Сначала мы рассмотрим случай $y_0 \neq 0$ (т. е. x_0 не равно ни 1, ни j, ни j^2). Тогда в качестве локальной координаты выберем функцию x. Это можно сделать, так как функция x определяет гомеоморфизм окрестности такой точки (x_0, y_0) пространства X на окрестность точки x_0 плоскости $\mathbf{C}$.

В самом деле, обратный гомеоморфизм можно определить, сопоставляя точке $x \in \mathbf{C}$, лежащей в окрестности точки x_0, пару (x, y), где $y = (1 - x^3)^{1/3}$, причем непрерывная ветвь кубического корня выбирается таким образом, чтобы значению $x = x_0$ соответствовало значение $y = y_0$.

Пусть теперь $y_0 = 0$. Тогда $x_0 \neq 0$ (в самом деле, x_0 равен или 1, или j, или j^2). В этом случае в качестве локальной координаты может быть взята функция y. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно в предыдущем рассуждении поменять ролями x и y. Необходимо еще проверить, что определенные таким образом локальные координаты удовлетворяют *условию согласованности* [условие (1.1) из § 4]. Иными словами, нужно показать, что в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \in X$, такой, что как x_0, так и y_0 отличны от нуля, равенство (2.1) определяет локальную координату y как голоморфную функцию от локальной координаты x, и наоборот. Но это очевидно, поскольку функция

$(1-x^3)^{1/3}$ имеет голоморфную ветвь, принимающую в точке $x=x_0$ значение y_0, и функция $(1-y^3)^{1/3}$ также имеет голоморфную ветвь, принимающую в точке $y=y_0$ значение x_0.

Таким образом, мы снабдили топологическое пространство X структурой аналитического пространства. В этой структуре каждая из функций x и y голоморфна на X. В самом деле, рассмотрим, например, функцию x; она голоморфна в окрестности точки (x_0, y_0) в случае, когда $y_0 \neq 0$, так как она сама является локальной координатой, и в случае, когда $y_0 = 0$, так как локальной координатой является функция y, и функция $x = (1-y^3)^{1/3}$ голоморфна.

Рассмотрим отображение $\varphi : X \to \mathbf{C}$, определенное с помощью функции x. Пара (X, φ) представляет собой риманову поверхность над плоскостью $\mathbf{C}$, ту самую риманову поверхность, которую мы хотели определить. На этой поверхности функция $y=(1-x^3)^{1/3}$ однозначна и голоморфна. Заметим, что над каждой точкой $x \in \mathbf{C}$ лежат ровно три точки римановой поверхности X: три точки (x, y), для которых $y=(1-x^3)^{1/3}$. Как принято говорить, риманова поверхность X является трехлистной. Эти три точки сливаются, однако, в одну, когда x совпадает с одной из точек $1, j, j^2$.

Мы сейчас определим на аналитическом пространстве X *дифференциальную голоморфную форму* ω. В окрестности точки (x_0, y_0), такой, что $y_0 \neq 0$, положим

$$\omega = \frac{dx}{y}.$$

В окрестности же такой точки (x_0, y_0), что $y_0 = 0$ (следовательно, $x_0 \neq 0$), мы положим

$$\omega = -\frac{y\,dy}{x^2}$$

(если $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$, то из равенства (2.1) вытекает, что

$$x^2\,dx + y^2\,dy = 0.$$

Отсюда $\frac{dx}{y} = -\frac{y\,dy}{x^2}$). Можно сказать, что ω есть дифференциальная форма

$$\frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}}$$

на плоскости $\mathbf{C}$, которая делается голоморфной, если ее рассматривать на римановой поверхности (X, φ) над $\mathbf{C}$.

Упражнение. Показать, что замкнутый путь γ в плоскости $\mathbf{C}$, изображенный на рис. 12, является образом при отображении φ некоторого замкнутого пути на римановой поверхности X. Более точно, на римановой поверхности X существуют *три* пути, переходящие в γ при отображении φ. Интегрируя по одному из этих путей дифференциальную форму ω, показать, что интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}}$ равен $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

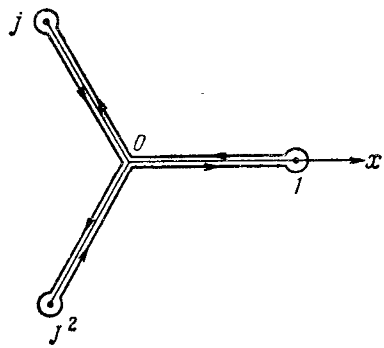


Рис. 12.

Вернемся к соотношению (2.1). Оно позволяет определить риманову поверхность не только над плоскостью $\mathbf{C}$, но и над сферой Римана $\mathbf{S}_2$.

В самом деле, рассмотрим *комплексную проективную плоскость* $P_2(\mathbf{C})$, которая получается, если в пространстве

$$\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \setminus \{0, 0, 0\}$$

отождествить точки (x, y, z) и (x', y', z'), такие, что тройки комплексных чисел x, y, z и x', y', z' пропорциональны [тройка (x, y, z) называется системой однородных координат точки $P_2(\mathbf{C})$, которую она определяет]. Точки плоскости $P_2(\mathbf{C})$, однородные координаты которых удовлетворяют соотношению

$$x^3 + y^3 = z^3, \tag{2.2}$$

образуют хаусдорфово топологическое пространство X'. Пространство X может быть естественным образом представлено как подпространство пространства X'. Для этого достаточно сопоставить каждой точке $(x, y) \in X$ точку с однородными координатами $(x, y, 1)$. Пространство X' содержит, кроме точек пространства X, еще три «бесконечные» точки, обладающие однородными координатами соответственно $(1, -1, 0)$, $(j, -1, 0)$ и $(j^2, -1, 0)$. Читателю предоставляется определить на пространстве X' структуру аналитического пространства, которая являлась бы продолжением аналитической структуры, построенной нами на X (для этого достаточно определить локальные координаты в окрестности каждой из трех бесконечных точек пространства X'), и определить голоморфное отображение $\varphi'\colon X' \to S_2$, которое было бы продолжением отображения φ.

Показать, что X' есть компактное аналитическое пространство, причем функция y/z мероморфна на этом пространстве, и три бесконечные точки и только они являются полюсами этой функции.

3. Риманова поверхность, соответствующая «эллиптической кривой». Рассмотрим алгебраическое соотношение вида

$$y^2 = 4x^3 - 20\, a_2 x - 28 a_4, \tag{3.1}$$

связывающее два комплексных переменных x и y (мы умышленно сохраняем обозначения, которые использовали в п. 5 § 2 гл. V). Предположим, что числа a_2 и a_4 подобраны таким образом, что полином, стоящий в правой части равенства (3.1), имеет три различных корня. Обозначим этот полином через $P(x)$; тогда $P'(x) \neq 0$ для любого корня x уравнения $P(x) = 0$ (через P' мы обозначили производную полинома P).

Мы сопоставим «эллиптической алгебраической кривой» (3.1) риманову поверхность (X, φ) над плоскостью $\mathbf{C}$. Как топологическое пространство X является подпространством произведения $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, состоящим из тех точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют соотношению (3.1).

На этом топологическом пространстве мы определим структуру аналитического пространства следующим образом. Пусть (x_0, y_0) — точка пространства X. Если $y_0 \neq 0$, то в окрестности этой точки в качестве локальной координаты мы возьмем функцию x. Если же $y_0 = 0$, то $P'(x_0) \neq 0$; следовательно, согласно теореме о неявной функции, соотношение (3.1) в окрестности точки $(x_0, 0)$ эквивалентно соотношению вида $x = f(y)$, где f — функция, голоморфная в окрестности точки $y = 0$, принимающая в этой точке значение

x_0. Поэтому в окрестности точки $(x_0, 0)$ в качестве локальной координаты может быть взята функция y.

Отображение $\varphi: X \to \mathbf{C}$, сопоставляющее паре (x, y) точку $x \in \mathbf{C}$, является, очевидно, голоморфным. Следовательно, пара (X, φ) — это риманова поверхность над $\mathbf{C}$. Она двулистна, поскольку каждому значению x соответствует два, вообще говоря, различных значения y (они различны при $P(x) \neq 0$).

С другой стороны, функция на пространстве X, принимающая в точке (x, y) значение y, также голоморфна на X. Мы обозначим ее просто y.

Дифференциальная форма ω, определенная равенством $\omega = dx/y$ в окрестности точки $(x_0, y_0) \in X$, такой, что $y_0 \neq 0$, и равенством $\omega = \frac{dy}{6x^2 - 10a_2}$ в окрестности точки $(x_0, 0) \in X$, голоморфна на X. Поскольку эта форма замкнута, в окрестности каждой точки пространства X она имеет примитивную. Эту примитивную можно рассматривать глобально как *многозначную* функцию z, голоморфную в окрестности каждой точки пространства X. Соотношение $dz = \omega$ показывает, что

$$dx = y\, dz. \tag{3.2}$$

В окрестности каждой точки $(x_0, y_0) \in X$ каждая непрерывная ветвь функции z является локальной координатой. В самом деле, если $y_0 \neq 0$, то x есть локальная координата и $dz = \frac{1}{y} dx$; если же $y_0 = 0$, то y есть локальная координата и $dz = \frac{dy}{6x^2 - 10a_2}$, причем знаменатель отличен от нуля.

Теперь дополним риманову поверхность (X, φ) над плоскостью $\mathbf{C}$ до римановой поверхности (X', φ') над сферой Римана S_2. С этой целью обозначим через (x, y, t) *однородные координаты* точки комплексной проективной плоскости $P_2(\mathbf{C})$ (см. п. 2) и рассмотрим множество X' точек пространства $P_2(\mathbf{C})$, однородные координаты которых удовлетворяют соотношению

$$y^2 t = 4x^3 - 20a_2 x t^2 - 28a_4 t^3; \tag{3.3}$$

X' представляет собой хаусдорфово топологическое пространство.

Сопоставив каждой точке $(x, y) \in X$ точку пространства X' с однородными координатами $(x, y, 1)$, мы отождествим пространство X с некоторым подпространством пространства X'. При этом дополнение $X' \setminus X$ состоит из единственной «бесконечной» точки с однородными координатами $(0, 1, 0)$. В окрестности этой точки, которую мы будем обозначать ∞, в качестве локальной координаты можно взять функцию $x/y = x'$, потому что функция x' определяет гомеоморфизм окрестности точки ∞ пространства X' на окрестность точки 0 плоскости $\mathbf{C}$.

В самом деле, положим $t/y = t'$. Соотношение (3.3) эквивалентно соотношению

$$t' = 4x'^3 - 20a_2 x' t'^2 - 28a_4 t'^3.$$

В окрестности точки $x'=0$, $t'=0$, согласно теореме о неявной функции, t' может быть представлена как голоморфная функция x':

$$t'=4x'^3-320a_2x'^7+\ldots . \qquad (3.4)$$

Выбор локальной координаты x' в окрестности точки ∞ завершает определение аналитической структуры на пространстве X' (проверка условия согласованности предоставляется читателю). Наконец, отображение φ' определим следующим образом: на X оно совпадает с φ, а точку ∞ пространства X' оно переводит в бесконечную точку сферы S_2.

Голоморфная дифференциальная форма ω, которую мы определили на пространстве X, может быть продолжена до голоморфной дифференциальной формы на всем пространстве X'. Для этого нужно определить ее в окрестности точки ∞. Положим

$$\omega=t'd\,(x'/t')=dx'-x'\frac{dt'}{t'}=dx'-\frac{12x'^2+\ldots}{4x'^2+\ldots}\,dx',$$

где x' — локальная координата в окрестности точки ∞, t' — голоморфная функция от x', определенная равенством (3.4). Иными словами,

$$\omega=-2dx'\,(1+g\,(x')),$$

где g — функция, голоморфная в окрестности точки $x'=0$ и принимающая в этой точке нулевое значение. Форма ω, заданная таким образом на компактном пространстве X, в окрестности каждой точки этого пространства обладает примитивной z. Это многозначная функция на пространстве X'. В окрестности каждой точки пространства X' она является локальной координатой.

Предположим теперь, что числа a_2 и a_4 получены по некоторой дискретной группе Ω с помощью равенств (5.5) § 2 гл. V. Тогда из предложения 5.1 этого же параграфа вытекает, что мероморфные преобразования

$$x=\wp\,(z),\quad y=\wp'\,(z) \qquad (3.5)$$

определяют *изоморфизм* аналитического пространства $\mathbf{C}/\Omega$ на аналитическое пространство X'. Обратный изоморфизм должен выражаться функцией z, многозначной и голоморфной на X', непрерывные ветви которой в окрестности любой точки пространства X' получаются одна из другой прибавлением константы из группы Ω.

В силу равенств (3.5) имеем $dx=y\,dz$, и, следовательно, dz (это вполне определенная дифференциальная форма на X') есть не что иное, как форма ω, которую мы рассматривали выше (это оправдывает обозначение z).

Откажемся теперь от предположения о том, что числа a_2 и a_4 найдены с помощью дискретной группы Ω по формулам (5.5) из § 2 гл. V. Многозначная функция z, удовлетворяющая на X' условию $dz=\omega$, определена независимо от этого предположения.

Более детальное исследование топологических свойств пространства X' позволяет установить, что различные непрерывные ветви функции z получаются одна из другой прибавлением константы, причем все эти константы образуют дискретную подгруппу Ω аддитивной группы $\mathbf{C}$, порожденную двумя элементами e_1 и e_2, линейно независимыми над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел.

Чтобы окончательно определить многозначную функцию z, можно предположить, что она принимает в точке ∞ нулевое значение (по модулю группы Ω). Теперь рассмотрим алгебраическую кривую

$$y^2 = 4x^3 - 20b_2x - 28b_4,$$

где

$$b_2 = 3 \sum_{\omega \in \Omega,\ \omega \neq 0} \frac{1}{\omega^4}, \quad b_4 = 5 \sum_{\omega \in \Omega,\ \omega \neq 0} \frac{1}{\omega^6}.$$

Пусть (X'', φ'') — риманова поверхность над S_2, соответствующая этой кривой. Многозначная функция z определяет голоморфное отображение пространства X' на пространство $\mathbf{C}/\Omega$, которое, как мы видели, изоморфно X''. Имеем, следовательно, голоморфное отображение $f : X' \to X''$.

Можно показать (этого мы не будем здесь делать), что отображение f является изоморфизмом. Следовательно, отображение f принимает точно по одному разу любое значение (по модулю группы Ω). Поэтому координаты x и y точки пространства X' (не однородные) являются мероморфными функциями от z, для которых группа Ω является группой периодов. Легко видеть, что точка $z=0$ является двойным полюсом функции x, причем главная часть этой функции в точке $z=0$ равна $1/z^2$, и других полюсов на X' она не имеет. Следовательно, $x = \wp(z)$, где $\wp$ — функция Вейерштрасса, соответствующая группе Ω, и $y = \wp'(z)$.

Таким образом, изоморфизм $f : X' \to X''$ есть не что иное, как тождественное преобразование, и $b_2 = a_2$, $b_4 = a_4$.

Наконец, мы видим, что *любая пара чисел a_2 и a_4, таких, что полином $P(x)$, стоящий в правой части равенства* (3.1), *имеет три различных корня, определяет дискретную группу Ω, причем числа a_2 и a_4 удовлетворяют соотношениям* (5.6) § 2 *гл.* V. *Более того, алгебраическая кривая* (3.1), *включая точку ∞, допускает параметрическое представление с помощью формул* (3.5).

4. Понятие аналитического продолжения. Мы ограничимся рассмотрением аналитического продолжения в плоскости $\mathbf{C}$. Поставим такую задачу.

Задача. Предположим, что дана непустая область U в плоскости $\mathbf{C}$ (мы будем рассматривать U как риманову поверхность над $\mathbf{C}$, выбрав в качестве отображения $i : U \to \mathbf{C}$ естественное вложение).

Пусть f — функция, голоморфная в области U. Мы построим *неразветвленную* риманову поверхность (X, φ) над плоскостью $\mathbf{C}$ и изоморфизм j области U на некоторое открытое множество пространства X так, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) $\varphi \circ j = i$ (это позволяет отождествить U с «подповерхностью» поверхности X);

(2) функция f *продолжается* до функции g, *голоморфной* на X (слово «продолжается» означает, что $g \circ j = f$ на U);

(3) риманова поверхность (X, φ) есть «максимальная возможная» среди римановых поверхностей, удовлетворяющих условиям (1) и (2).

Точнее говоря, если существуют неразветвленная риманова поверхность (X', φ') над плоскостью $\mathbf{C}$ и изоморфизм j' области U на открытое множество пространства X', удовлетворяющие условиям (1) и (2), то *существует и единственно голоморфное отображение*

$$h: X' \to X,$$

такое, что

$$h \circ j' = j \quad \text{и} \quad \varphi \circ h = \varphi'. \tag{4.1}$$

Прежде чем идти дальше, заметим следующее. В условии (2) голоморфная функция g, которая является «продолжением» функции f, *единственна*, в силу «принципа аналитического продолжения» (см. § 4, п. 4).

Кроме того, функция g' из условия (3) есть единственная голоморфная на X' функция, такая, что $g' \circ j' = f$. Отсюда

$$g \circ h = g'. \tag{4.2}$$

В самом деле, функция $g \circ h$ голоморфна на X', равенство $(g \circ h) \circ j' = f$ выполняется в области U, поскольку $h \circ j' = j$, согласно (4.1), и $g \circ j = f$ по предположению.

Условие (3) можно коротко выразить следующим образом: тройка (X, φ, j) обладает *свойством универсальности* (при выполнении условий (1) и (2)).

Фундаментальная теорема об аналитическом продолжении состоит в следующем: пусть заданы область $U \subset \mathbf{C}$ и функция f, голоморфная в U; тогда *предыдущая задача имеет единственное решение.*

Здесь имеется в виду единственность «с точностью до изоморфизма».

Мы начнем с того, что докажем единственность, уточнив заодно, что означают слова «с точностью до изоморфизма».

Доказательство единственности. Предположим, что наша задача имеет два решения: (X, φ, j) и (X_1, φ_1, j_1). Так как, по предположению, тройка (X, φ, j) обладает свойством универсальности, то существует и единственно голоморфное отображение $h : X_1 \to X$, такое, что

$$h \circ j_1 = j, \quad \varphi \circ h = \varphi_1. \tag{4.3}$$

По тем же причинам существует и единственно голоморфное отображение $h_1 \colon X \to X_1$, такое, что

$$h_1 \circ j = j_1 \text{ и } \varphi_1 \circ h_1 = \varphi.$$

Рассмотрим отображение $k = h \circ h_1$ пространства X на себя. Это отображение удовлетворяет соотношениям

$$k \circ j = j \quad \text{и} \quad \varphi \circ k = \varphi.$$

Согласно свойству универсальности, существует *единственное* голоморфное отображение, удовлетворяющее этим условиям, а так как тождественное отображение им удовлетворяет, то отображение $k = h \circ h_1$ есть тождественное отображение X на себя.

По тем же причинам отображение $h_1 \circ h$ есть тождественное отображение X_1 на себя. Это означает, что отображения h и h_1 представляют собой взаимно обратные изоморфизмы.

Таким образом, любые два решения нашей задачи связаны изоморфизмом h, удовлетворяющим условиям (4.3). В этом смысле и можно говорить, что решение рассматриваемой задачи *единственно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство *существования* решения нашей задачи гораздо более тонко. Читатель может без ущерба для дальнейшего пропустить доказательство, которое мы здесь приводим.

Пусть Z — множество пар (z_0, S), где $z_0 \in \mathbf{C}$ — точка, S — степенной ряд (одного переменного), радиус сходимости которого отличен от нуля. Мы определим на Z следующую топологию. Каждой паре (V, F), где $V \subset \mathbf{C}$ — открытое множество, а F — функция, голоморфная на этом множестве, мы сопоставим множество $W(V, F)$

пар (z_0, S), где $z_0 \in V$, а S — степенной ряд $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$, такой, что $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n (z-z_0)^n$ есть разложение функции F в степенной ряд в окрестности точки z_0. По определению, множества $W(V, F)$ образуют *базис открытых множеств* в пространстве Z, т. е. любое открытое множество в пространстве Z есть объединение множеств вида $W(V, F)$, и обратно, всякое объединение множеств вида $W(V, F)$ открыто в Z. Легко показать, что пересечение двух открытых множеств открыто. Таким образом, на Z определена некоторая топология. Эта топология *хаусдорфова*.

В самом деле, пусть (z_0, S) и (z_0', S') — различные точки Z. Эти точки обладают непересекающимися открытыми окрестностями; это очевидно, если $z_0 \neq z_0'$; если же $z_0 = z_0'$, но $S \neq S'$, то множество точек (достаточно близких к z_0), в окрестности которых голоморфные функции, заданные различными степенными рядами S и S', совпадают, пусто, в силу «принципа аналитического продолжения».

Сопоставим каждой паре (z_0, S) точку $z_0 \in \mathbf{C}$. Получим отображение $p: Z \longrightarrow \mathbf{C}$, которое является *локальным гомеоморфизмом* (т. е. любая точка пространства Z обладает окрестностью, такой, что сужение отображения p на нее есть гомеоморфизм этой окрестности на ее образ); это тотчас же следует из определения топологии в Z.

Используя функцию p как *локальную координату* в окрестности каждой точки пространства Z, мы определяем на Z структуру *аналитического пространства*. В этой структуре отображение p является голоморфным. Следовательно, пара (Z, p) была бы римановой поверхностью над плоскостью $\mathbf{C}$, если бы Z было бы связно (как мы увидим, последнее не обязательно выполняется).

Определим функцию G на пространстве Z следующим образом. Значение этой функции в точке $(z_0, S) \in Z$ положим равным свободному члену степенного ряда $S = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$; иначе говоря, значение этой функции в точке (z_0, S) совпадает со значением в точке z_0 голоморфной функции $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n (z-z_0)^n$, определенной в окрестности точки z_0. Из определения аналитической структуры на Z немедленно вытекает, что функция G *голоморфна* в пространстве Z.

В самом деле, если в окрестности точки (z_0, S) выразить G как функцию локальной координаты z, то разложение этой функции в степенной ряд в окрестности точки z_0 будет иметь вид $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n (z-z_0)^n$, где $a_0, a_1, \ldots$, — коэффициенты ряда S.

До настоящего момента мы еще не использовали заданных непустой области U и функции f, голоморфной в U. Теперь мы ими воспользуемся. Рассмотрим множество $W(U, f)$. По определению, оно является связным непустым открытым множеством в аналитическом пространстве Z. Сужение отображения $p: Z \longrightarrow \mathbf{C}$ представляет собой изоморфизм множества $W(U, f)$ на открытое множество $U \subset \mathbf{C}$. Пусть j — обратный изоморфизм. Композиция $G \circ j$ есть не что иное, как f.

Пусть X — связная компонента пространства Z, содержащая область $j(U)$; пусть, далее, φ — сужение отображения p на пространство X, а g — сужение функции G на X. Так как отображение p является локальным гомеоморфизмом, то же самое верно для отображения φ. Следовательно, пара (X, φ) есть *неразветвленная* риманова поверхность над плоскостью $\mathbf{C}$.

Для того чтобы показать, что риманова поверхность (X, φ) и изоморфизм j удовлетворяют условиям нашей задачи, осталось проверить выполнение условий (1), (2) и (3).

Условие (1) сразу следует из определения изоморфизма j. Условие (2) выполнено, поскольку g есть сужение функции G на X и, как мы видели, $G \circ j = f$. Докажем (3).

Пусть даны неразветвленная риманова поверхность (X', φ') над плоскостью $\mathbf{C}$ и изоморфизм j' множества U на открытое множество пространства X', удовлетворяющие условиям (1) и (2). Пусть, далее, g' — функция, голоморфная в X', такая, что $g' \circ j' = f$. Определим отображение k пространства X' в Z, сопоставив точке $x'_0 \in X'$ пару $(\varphi'(x'_0), S)$, где S — ряд $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$, такой, что ряд $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n (z-z_0)^n$ представляет собой разложение голоморфной функции $\lambda(z)$, где $\lambda(\varphi'(x')) = g'(x')$, в окрестности точки $z_0 = \varphi'(x'_0)$ (здесь используется предположение о том, что риманова поверхность (X', φ') является неразветвленной и, следовательно, $\varphi'(x')$ — локальная координата в окрестности точки x'_0 на пространстве X'). Отображение k, которое мы определили, голоморфно на X'. Поскольку пространство X' связно (по определению римановой поверхности), его образ при отображении k также связен. Так как его образ содержит, очевидно, множество $j(U)$, он содержится в связной компоненте X пространства Z. Следовательно, k индуцирует голоморфное отображение $h: X' \to X$, которое, как легко проверить, удовлетворяет условиям (4.1).

Для того чтобы завершить доказательство, нужно еще показать, что всякое голоморфное отображение $h: X' \to X$, удовлетворяющее условию (4.1), совпадает с построенным. Но это вытекает из принципа аналитического продолжения (§ 4, п. 4): два отображения, совпадающие на открытом множестве $j'(U)$, совпадают на всем связном пространстве X'.

Различные замечания. Таким образом, мы получили «самую большую» неразветвленную риманову поверхность над плоскостью $\mathbf{C}$, содержащую данную область U, в которой данная функция f голоморфна.

Более простая идея состоит в нахождении «самой большой области», содержащей U, на которую можно продолжить f как голоморфную функцию. Но такая задача, вообще говоря, *не имеет решения*, и поэтому необходимо рассматривать вместо областей плоскости $\mathbf{C}$ неразветвленные римановы поверхности.

Приведем пример, который показывает, что может не существовать самой большой связной области V, содержащей U, на которую можно продолжить функцию f. Возьмем в качестве U открытый круг плоскости $\mathbf{C}$, не содержащий нуля; в качестве функции f — непрерывную ветвь функции $\log z$ в области U. Пусть область U' симметрична области U относительно начала координат. Легко построить две односвязные области V_1 и V_2, каждая из

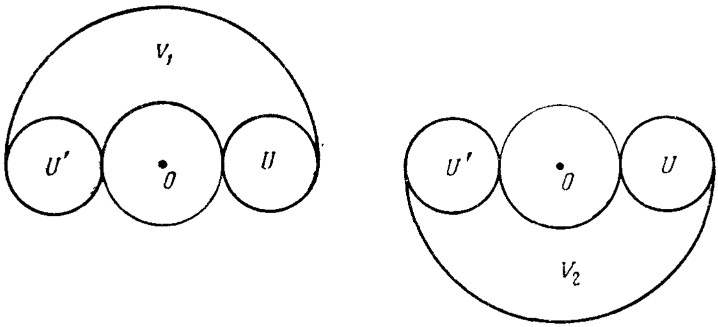


Рис. 13.

которых содержит как U, так и U' (см. рис. 13), такие, что если продолжить на V_1 (соответственно на V_2) рассматриваемую непрерывную ветвь функции $\log z$, то мы получим в области U' разные ветви. Поэтому не может существовать области V, содержащей V_1 и V_2, на которую можно продолжить непрерывную ветвь логарифма. Следовательно, не существует самой большой области, содержащей U, на которую такое продолжение возможно.

Пусть функция f голоморфна в области $U \subset \mathbf{C}$, и пусть $z_0 \in U$. Рассмотрим путь $\gamma\colon I \to \mathbf{C}$, начинающийся в точке z_0 и кончающийся в точке z_1 (здесь I — отрезок $[0, 1]$). При этом не предполагается, что этот путь весь лежит в области U. Пусть, далее, тройка (X, φ, g) удовлетворяет условиям (1), (2) и (3). Если существует непрерывное отображение $h : I \to X$, такое, что $\varphi \circ h = \gamma$ и $h(0) = i(z_0)$, то оно единственно (доказательство тривиально). Отображение h называется в этом случае *поднятием* пути γ на риманову поверхность (X, φ). В окрестности точки $h(1) \in X$ функция g может быть представлена как функция, голоморфная по $z = \varphi(x)$ в окрестности точки z_1; говорят, что эта функция, голоморфная по z, получена при *аналитическом продолжении голоморфной функции* f *вдоль пути* γ (с началом в точке z_0 и концом в точке z_1).

Изложенная здесь теория аналитического продолжения допускает различные обобщения. Например, вместо продолжения на римановы поверхности, не разветвленные над плоскостью $\mathbf{C}$, можно рассматривать продолжение на неразветвленные римановы поверхности *над сферой Римана*. Все рассуждения будут аналогичны.

Можно также рассматривать римановы поверхности, от которых не требуется, чтобы они были неразветвленными, накладывая на них условия, аналогичные (1), (2) и (3). Можно показать, что таким образом поставленная задача также обладает решением, единственным «с точностью до изоморфизма».

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть D — односвязная область плоскости $\mathbf{C}$, не совпадающая с $\mathbf{C}$, и $a \in D$. Предположим, что b — комплексное число, по модулю меньшее единицы, α — действительное число. Доказать, что существует *единственная* голоморфная функция $f(z)$, которая определяет изоморфизм области D на единичный круг и удовлетворяет следующим условиям:

$$(1)\quad f(a) = b, \qquad (2)\quad \arg f'(a) = \alpha.$$

2. Пусть D — область, граница которой состоит из двух окружностей, C_1 и C_2, не имеющих общих точек и таких, что окружность C_1 расположена внутри окружности C_2. Доказать, что существует дробно-линейное преобразование, которое отображает область D на кольцо $r < |z| < 1$, где r — подходящее число, большее нуля и меньшее единицы.

3. Пусть $f(z)$ — голоморфная и однолистная функция в единичном круге B ($|z| < 1$), и пусть $D = f(B)$ — образ этого круга при отображении f. Через D_r $(0 < r < 1)$ обозначим образ при отображении f открытого круга B_r ($|z| < r$).

(1) Доказать, что если h — автоморфизм области D, оставляющий неподвижной точку $f(0)$, то

$$h(D_r) \subset D_r \text{ при } 0 < r < 1$$

[применить лемму Шварца к функции $f^{-1}(h(f(z)))$].

(2). Доказать, что если область D является *звездной* по отношению к точке $f(0)$ (определение см. гл. II, § 1, п. 7), то и все области D_r $(0 < r < 1)$ являются звездными по отношению к точке $f(0)$. (Свести к случаю $f(0) = 0$ и рассмотреть функцию $f^{-1}(\lambda f(z))$ при $0 < \lambda < 1$.)

(3) Предположим теперь, что область D *выпукла*. Показать, что область D_r также выпукла при $0 < r < 1$. Если E — открытый круг, такой, что $\bar{E} \subset B$, то будет ли его образ $f(E)$ также выпуклым?

(Пусть $0 < \lambda < 1$ и $z_1, z_2 \in B$, причем $|z_1| \leqslant |z_2|$. Рассмотреть функцию

$$g_\lambda(z) = (1-\lambda) f(zz_1/z_2) + \lambda f(z).$$

Для решения второго вопроса доказать, что для любого r $(0 < r < 1)$ существует автоморфизм φ круга B, такой, что $\varphi(E) = B_r$, и рассмотреть функцию $f \circ \varphi^{-1}$.)

4. Пусть $w = f(z)$ — голоморфная однолистная функция в единичном круге, и Γ — образ при отображение f окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$.

Доказать, что радиус кривизны ϱ кривой Γ в точке $f(a)$, где $|a| = r$, выражается следующей формулой:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\operatorname{Re}(af''(a)/f'(a)) + 1}{|af'(a)|}.$$

(Заметим, что если $f(re^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta)$, то

$$\frac{u'v'' - u''v'}{u'^2 + v'^2} = \operatorname{Im} \frac{u'' + iv''}{u' + iv'},$$

где u', u'', ... —производные по θ).

5. Пусть C — окружность радиуса r с центром a, и пусть z_1, z_2 — две точки, соответствующие друг другу при инверсии относительно этой окружности. Пусть S — дробно-линейное преобразование, такое, что $S(\zeta) \neq \infty$ при $\zeta \in C$. Показать, что $S(z_1)$ и $S(z_2)$ соответствуют друг другу при инверсии T, которая определяется преобразованием S.

Если $S(\zeta) = \infty$ при некотором $\zeta \in C$, показать, что $S(z_1)$ и $S(z_2)$ симметричны относительно прямой, являющейся образом C при преобразовании S.

6. Пусть D (соответственно Δ) — область, содержащаяся в одной из связных компонент дополнения к окружности C (соответственно Γ) радиуса r (соответственно ϱ) с центром в точке a (соответственно α) в плоскости комплексного переменного z (соответственно w).

Предположим, что существует непустая дуга C_0 (соответственно Γ_0) окружности C (соответственно Γ), которая содержится в границе области D (соответственно Δ). Предположим, кроме того, что область D (соответственно Δ) не содержит центра a (соответственно α) окружности C (соответственно Γ). Обозначим через J_C (соответственно J_Γ) инверсию относительно окружности C (соответственно Γ). Пусть $f(z)$ — непрерывная функция в $D \bigcup C_0$ со значениями в $\Delta \bigcup \Gamma_0$, такая, что

(1) преобразование $w = f(z)$ определяет изоморфизм области D на область Δ.

(2) f отображает дугу C_0 на дугу Γ_0.

Доказать, что при выполнении этих условий преобразование f можно единственным образом продолжить до изоморфизма области $D \bigcup C_0 \bigcup J_C(D)$ на область $\Delta \bigcup \Gamma_0 \bigcup J_\Gamma(\Delta)$.

7. Пусть a, r — два действительных числа, таких, что $r > a > 0$. Найти функцию $w = f(z)$, которая определяет изоморфизм внутренности овала Кассини $|z^2 - a^2| < r^2$ на единичный круг B, сохраняющий оси симметрии. (В силу принципа симметрии, достаточно найти функцию f, определяющую изоморфизм правой половины D^+ овала Кассини, определяемой соотношениями

$$|z^2 - a^2| < r^2, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

на правую половину B^+ единичного круга, определяемую соотношениями

$$|w| < 1, \quad \operatorname{Re} w > 0,$$

принимающую действительные значения на действительной оси и отображающую отрезок iy, $|y| \leqslant r^2 - a^2$, плоскости z на отрезок iv, $|v| \leqslant 1$, плоскости w. Для этого следует сначала рассмотреть преобразование $\zeta = z^2$, затем дробно-линейное преобразование $Z = \dfrac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$, преобразующее окружность $|\zeta - a^2| = r^2$ в единичную окружность $|Z| = 1$, а отрезок $a^2 - r^2 \leqslant \operatorname{Re} \zeta \leqslant 0$, $\operatorname{Im} \zeta = 0$ в отрезок $-1 \leqslant \operatorname{Re} Z \leqslant 0$, $\operatorname{Im} Z = 0$; и, наконец, подходящую непрерывную ветвь функции $w = Z^{1/2}$.)

8. Рассмотрим функцию $f(z)$, определенную в верхней полуплоскости P^+ ($\operatorname{Im} z > 0$) равенством

$$u = f(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

где интеграл берется вдоль некоторого пути, соединяющего точку 0 с точкой z, а k — действительное число, лежащее между нулем и единицей.

Выберем однозначную ветвь корня, равную единице при $t = 0$. Доказать, что функция $f(z)$ может быть непрерывно продолжена на замкнутую полуплоскость $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Положим

$$K = \int_1^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

(интегралы берутся по отрезкам на действительной оси). Доказать, что таким образом продолженная функция $f(z)$ определяет изоморфизм полуплоскости P^+ на открытый прямоугольник, имеющий следующие вершины: $-K$, K, $K + iK'$, $-K + iK'$, причем этот изоморфизм переводит действительную ось в периметр этого многоугольника. Определить точки, переходящие в вершины. Доказать, что обратное преобразование $z = F(u)$ можно продолжить до двоякопериодической функции с периодами $4K$ и $2iK'$ в плоскости переменного u. Вычислить ее нули и полюсы и доказать, что существует число A, такое, что

$$F(u) = A\vartheta_1(u/2K)/\vartheta_0(u/2K),$$

где ϑ_0 и ϑ_1 — функции, рассматривавшиеся в упражнении 3 гл. V ($\tau = iK'/K$).

Глава VII

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

1. Постановка задачи. Пусть k — целое число, большее или равное 1. Предположим, что заданы k функций от $k+1$ комплексных переменных

$$f_i(x, y_1, \ldots, y_k) \qquad (1 \leqslant i \leqslant k),$$

голоморфных в окрестности точки $(a, b_1, \ldots, b_k)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_k) \qquad (1 \leqslant i \leqslant k). \tag{1.1}$$

Найдем систему k функций $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, k)$, голоморфных в окрестности точки $x = a$, таких, что $\varphi_i(a) = b_i$, и удовлетворяющих системе уравнений (1.1). Последнее условие означает, что производные $\varphi_i'(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)). \tag{1.2}$$

Теорема 1. *Эта задача всегда имеет решение, и притом только одно.*

Эта теорема будет доказана в трех следующих пунктах.

2. Случай $k = 1$. Формальная часть. В этом случае у нас только одна неизвестная функция y переменного x и одно дифференциальное уравнение, которое нужно решить:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.1}$$

Данная функция $f(x, y)$ голоморфна в окрестности точки (a, b). Для простоты мы будем предполагать, что $a = b = 0$, так как общий случай можно свести к этому с помощью параллельного переноса.

Пусть

$$f(x, y) = \sum_{p,\, q \geqslant 0} c_{p,\, q} x^p y^q \tag{2.2}$$

— разложение функции f в ряд Тейлора, который по предположению сходится в окрестности начала координат. Неизвестная функция $y = \varphi(x)$ имеет разложение Тейлора

$$\varphi(x) = \sum_{n \geqslant 1} a_n x^n, \tag{2.3}$$

коэффициенты которого a_n нужно определить. Коэффициент a_0 равен нулю, поскольку требуется, чтобы $\varphi(0) = 0$.

На первом этапе мы ограничимся отысканием формального степенного ряда (2.3), который формально удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1). Иначе говоря, формальная производная $\varphi'(x)$ формального степенного ряда $\varphi(x)$ должна удовлетворять соотношению

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \tag{2.4}$$

где правая часть получена путем замены переменного y формальным степенным рядом $\varphi(x)$ (без свободного члена).

Предложение 2.1. *Если задан формальный ряд* (2.2), *то существует один и только один формальный ряд* (2.3), *который удовлетворяет соотношению* (2.4).

Сейчас мы будем доказывать это предложение. Вопрос о том, будет ли полученный таким образом ряд (2.3) в действительности сходиться в окрестности нуля, мы изучим несколько позже.

В двух частях равенства (2.4) мы имеем тождественно равные степенные ряды переменного x. Приравнивая коэффициенты при x^n в обеих частях, получаем

$$(n+1) a_{n+1} = P_{n+1}(a_1, \ldots, a_n;\ c_{p,\, q}), \tag{2.5}$$

где P_{n+1} — полином от символов $a_1, \ldots, a_n$ и конечного числа символов $c_{p,q}$, коэффициенты которого — целые неотрицательные числа. Нецелесообразно вычислять эти полиномы в явном виде. Например:

$$a_1 = c_{0,\,0}, 2a_2 = c_{1,\,0} + c_{0,1} a_1.$$

Из соотношений (2.5) выводим, индукцией по n, что

$$a_n = Q_n(c_{p,q}), \tag{2.6}$$

где Q_n — многочлены с неотрицательными рациональными коэффициентами от различных переменных $c_{p,q}$ (каждый многочлен Q_n зависит только от конечного числа этих переменных).

Важно заметить, что многочлены Q_n определены раз и навсегда, их коэффициенты не зависят от значения коэффициентов $c_{p,q}$ в разложении (2.2). Первые многочлены Q_n следующие:

$$Q_1 = c_{0,0}, Q_2 = \frac{1}{2}(c_{1,0} + c_{0,1}c_{0,0}).$$

Соотношения (2.6) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы выполнялось формальное равенство (2.4). Предложение 2.1 доказано.

3. Случай $k = 1$. Вопросы сходимости. Предположим теперь, что степенной ряд в правой части равенства (2.2) сходится в окрестности точки (0, 0). Нужно доказать, что степенной ряд (2.3), коэффициенты которого определяются формулами (2.6), имеет ненулевой радиус сходимости. Для этого мы применим метод, называемый *методом мажорант.*

Определение. Мы скажем, что формальный степенной ряд

$$F(x, y) = \sum_{p,q \geqslant 0} C_{p,q} x^p y^q \tag{3.1}$$

является *мажорантой* ряда (2.2), если коэффициенты $C_{p,q}$ неотрицательны и удовлетворяют неравенствам

$$|c_{p,q}| \leqslant C_{p,q}.$$

Точно так же определим мажоранту

$$\Phi(x) = \sum_{n \geqslant 1} A_n x^n \tag{3.2}$$

формального ряда (2.3).

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Пусть $F(x, y)$ — мажоранта ряда $f(x, y)$. Пусть $\Phi(x)$ — формальный ряд без свободного члена, являющийся единственным формальным решением дифференциального уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y). \tag{3.3}$$

Тогда Φ является мажорантой φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Коэффициенты A_n ряда Φ задаются, как мы видели, формулами

$$A_n = Q_n(C_{p,q}). \tag{3.4}$$

Поскольку коэффициенты многочленов Q_n неотрицательны, из неравенств $|c_{p,q}| \leqslant C_{p,q}$ и классических неравенств для абсолютной величины суммы и произведения следует, что $|a_n| \leqslant A_n$. Тем самым предложение доказано.

Чтобы доказать, что ряд (2.3) имеет ненулевой радиус сходимости, когда данный ряд (2.2) сходится в окрестности начала координат, поступим следующим образом: выберем подходящую мажоранту F ряда f, далее вычислим в явном виде формальное решение Φ дифференциального уравнения (3.3) и непосредственно убедимся в том, что радиус сходимости ряда Φ отличен от нуля.

Так как радиус сходимости ряда φ больше или равен радиусу сходимости мажоранты Φ, отсюда следует, что радиус сходимости ряда φ отличен от нуля, и теорема 1 (п. 1) полностью доказана в случае, когда $k = 1$.

По предположению ряд (2.2) сходится при

$$|x| \leqslant r, \quad |y| \leqslant r, \tag{3.5}$$

где r — положительное число.

Пусть M — верхняя грань модуля $|f(x, y)|$ на множестве (3.5). Вследствие неравенства Коши (гл. IV, § 5, формула 4.2) имеем

$$|c_{p,q}| \leqslant \frac{M}{r^{p+q}}. \tag{3.6}$$

Положим

$$C_{p,q} = \frac{M}{r^{p+q}}, \tag{3.7}$$

где $C_{p,q}$ — коэффициенты степенного ряда $F(x, y)$, который является мажорантой функции $f(x, y)$.

Вычислим непосредственно сумму ряда F, который является двойной геометрической прогрессией:

$$F(x, y)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{r}\right)} \quad \text{при } |x|<r,\ |y|<r. \tag{3.8}$$

В дифференциальном уравнении (3.3) можно разделить переменные:

$$\left(1-\frac{y}{r}\right)dy=\frac{M\,dx}{1-\frac{x}{r}}. \tag{3.9}$$

Интегрируем (3.9) в квадратурах; решение y, обращающееся в нуль при $x=0$, задается соотношением

$$\left(1-\frac{y}{r}\right)^2-1=2M\log\left(1-\frac{x}{r}\right),\quad |x|<r, \tag{3.10}$$

где в правой части стоит главная ветвь логарифма ($\log 1=0$).

Из (3.10) можно вывести, что

$$y=r\left(1-\sqrt{1+2M\log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right), \tag{3.11}$$

где в правой части берется ветвь квадратного корня, которая равна 1 при $x=0$.

Правая часть соотношения (3.11) есть не что иное, как решение $\Phi(x)$ дифференциального уравнения (3.3) в окрестности точки $x=0$. Очевидно, что эта функция голоморфна в окрестности точки $x=0$ и, следовательно, ее разложение в степенной ряд имеет отличный от нуля радиус сходимости. В самом деле, легко видеть, что радиус сходимости правой части соотношения (3.11) равен

$$r\left(1-e^{-\frac{1}{2M}}\right).$$

Доказательство теоремы 1, таким образом, завершено в случае, когда $k=1$.

4. Случай произвольного k. Вернемся к задаче, поставленной в п. 1. Предположим, что числа $a, b_1, \ldots, b_k$ —

все равны 0, так как мы можем всегда перейти к этому случаю с помощью параллельного переноса.

Пусть

$$f_i(x, y_1, \ldots, y_k) = \sum_{p, q_1, \ldots, q_k \geq 0} c^{(i)}_{p, q_1, \ldots, q_k} x^p y_1^{q_1} \ldots y_k^{q_k} \tag{4.1}$$

— разложения Тейлора k голоморфных функций $f_i(x, y_1, \ldots, y_k)$.

Эти ряды нам даны. Нужно определить степенные ряды

$$\varphi_i(x) = \sum_{n \geq 1} a^{(i)}_n x^n, \tag{4.2}$$

которые сходятся в окрестности нуля и удовлетворяют соотношениям (1.2).

Так же, как и в случае $k = 1$, мы будем действовать в два этапа: сначала формально решим уравнения (1.2), а затем докажем сходимость полученных степенных рядов.

Формальное решение уравнений (1.2) единственно. Действительно, поскольку для любого i

$$\sum_n (n+1) a^{(i)}_{n+1} x^n = \sum c^{(i)}_{p, q_1, \ldots, q_k} x^p \left(\sum_{r_1} a^{(1)}_{r_1} x^{r_1}\right)^{q_1} \ldots,$$

это дает для любого i

$$a^{(i)}_n = Q^{(i)}_n (c^{(j)}_{p, q_1, \ldots, q_k}), \tag{4.3}$$

где $Q^{(i)}_n$ — многочлены с рациональными неотрицательными коэффициентами, каждый из которых зависит только от конечного числа переменных $c^{(j)}_{p, q_1, \ldots, q_k}$ (индекс j принимает значения $1, \ldots, k$).

Покажем теперь, что если степенные ряды (4.1) сходятся в окрестности начала координат, то ряды (4.2), коэффициенты которых задаются формулами (4.3), имеют ненулевой радиус сходимости.

Для этого заменим каждый ряд f_i его мажорантой F_i. Пусть $(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ — единственное формальное решение «мажорирующей системы»

$$\frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, \ldots, y_k). \tag{4.4}$$

Тогда для каждого i функция Φ_i является мажорантой ряда φ_i (доказательство аналогично доказательству предложения 3.1). Остается явно определить мажоранты F_i и Φ_i.

По предположению, функции f_i голоморфны в окрестности замкнутого поликруга

$$|x| \leqslant r, \quad |y_i| \leqslant r, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \tag{4.5}$$

и их абсолютные величины $|f_i|$ на этом поликруге меньше некоторого числа M. Отсюда выводим, что числа

$$C^{(i)}_{p, q_1, \ldots, q_k} = \frac{M}{r^{p+q_1+\ldots+q_k}} \tag{4.6}$$

могут служить коэффициентами мажорант F_i. Система дифференциальных уравнений (4.4), следовательно, выглядит так:

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{M}{1-x/r} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-y_i/r}. \tag{4.7}$$

Пусть $y_i = \Phi_i(x)$ — единственное формальное решение системы уравнений (4.7). Покажем, что каждый из рядов Φ_i равен одному и тому же ряду Φ.

В самом деле, пусть $y = \Phi(x)$ — единственное формальное решение дифференциального уравнения

$$\left(1 - \frac{y}{r}\right)^k \frac{dy}{dx} = \frac{M}{1-x/r}. \tag{4.8}$$

Очевидно, что если положить $y_i = \Phi(x)$ для любого i, то получится формальное решение системы (4.7), что и доказывает наше утверждение.

В конце концов все свелось к тому, чтобы показать, что формальный ряд $y = \Phi(x)$, который является решением уравнения (4.8), имеет ненулевой радиус сходимости. Но дифференциальное уравнение (4.8) интегрируется в квадратурах: его решение, которое обращается в нуль при $x = 0$, задается формулой

$$y = r\left\{1 - \left[1 + (k+1) M \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)\right]^{\frac{1}{k+1}}\right\}, \tag{4.9}$$

где в правой части стоит функция $\Phi(x)$, голоморфная в окрестности точки $x=0$. Следовательно, радиус сходимости положителен. В самом деле, этот радиус сходимости равен

$$r\left(1-e^{-\frac{1}{(k+1)M}}\right).$$

§ 2. ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРОВ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

1. Зависимость от параметров. Предположим теперь, что голоморфные функции f_i, стоящие в правой части системы дифференциальных уравнений (1.1), § 1, зависят голоморфным образом от параметров $t_1, \ldots, t_j$. Более точно, мы предположим, что задано k голоморфных функций

$$f_i(x, y_1, \ldots, y_k; t_1, \ldots, t_j),$$

зависящих от $k+j+1$ комплексных переменных в окрестности начала координат. Для каждой системы значений $(t_1, \ldots, t_j)$, достаточно близкой к $(0, \ldots, 0)$, система уравнений

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, \ldots, y_k; t_1, \ldots, t_j) \qquad (1 \leqslant i \leqslant k) \qquad (1.1)$$

имеет единственное голоморфное решение $y_i=\varphi_i(x)$, обращающееся в нуль при $x=0$. Функции $\varphi_i(x)$ зависят, конечно, от данных значений $t_1, \ldots, t_j$.

Обозначим через

$$y_i=\varphi_i(x; t_1, \ldots, t_j) \qquad (1 \leqslant i \leqslant k) \qquad (1.2)$$

решение системы (1.1), такое, что $\varphi_i(0; t_1, \ldots, t_k)=0$, где $i=1, \ldots, k$.

Теорема 2. *При этих предположениях функции $\varphi_i(x; t_1, \ldots, t_j)$ являются голоморфными функциями $j+1$ переменных $x, t_1, \ldots, t_j$ в окрестности начала координат $(0; 0, \ldots, 0)$.*

Для упрощения записи ограничимся доказательством этой теоремы в случае, когда $k=1$, $j=1$. Следовательно, имеем

$$f(x, y; t)=\sum_{p, q \geqslant 0} c_{p,q}(t)\, x^p y^q, \qquad (1.3)$$

где коэффициенты $c_{p,q}(t)$ тоже являются степенными рядами от переменного t:

$$c_{p,q}(t) = \sum_{r \geqslant 0} c_{p,q,r} t^r. \tag{1.4}$$

Единственное формальное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; t) \tag{1.5}$$

имеет коэффициенты a_n, задаваемые формулами (2.6), § 1. Следовательно, каждый коэффициент a_n сам является формальным степенным рядом от переменного t.

Таким образом, формальное решение уравнения (1.5) есть формальный степенной ряд

$$y = \varphi(x, t) \tag{1.6}$$

от двух переменных x и t.

Чтобы доказать теорему 2, достаточно показать, что формальный степенной ряд (1.6) сходится, когда x и t достаточно малы. Для этого снова используем метод мажорант. Функция $f(x, y, t)$, по предположению, голоморфна в окрестности замкнутого поликруга

$$|x| \leqslant r, \quad |y| \leqslant r, \quad |t| \leqslant r, \quad \text{где} \quad r > 0. \tag{1.7}$$

Она имеет, следовательно, мажоранту $F(x, y, t)$ вида

$$F(x, y, t) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{r}\right)\left(1 - \frac{t}{r}\right)}. \tag{1.8}$$

Мы видим, что эта мажоранта получается из мажоранты, рассмотренной в п. 3 § 1, заменой в правой части формулы (3.8), § 1 числа M на $\frac{M}{1 - t/r}$. Следовательно, решение $y = \Phi(x, t)$ мажорирующего дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = F(x, y; t)$ задается формулой

$$\frac{\Phi(x, t)}{r} = 1 - \left[1 + \frac{2M}{1 - t/r} \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)\right]^{1/2}. \tag{1.9}$$

Но, очевидно, правая часть формулы (1.9) голоморфна относительно переменных x и t в окрестности начала координат $x = 0$, $t = 0$. Тем самым доказательство теоремы 2 закончено.

2. Зависимость от начальных условий. Рассмотрим, для простоты, систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_k), \tag{2.1}$$

которая не зависит от параметра. Данные функции $f_i(x, y_1, \ldots, y_k)$ всегда предполагаются голоморфными в окрестности начала координат.

Если точка $(b_1, \ldots, b_k)$ достаточно близка к началу координат, то функции f_i, голоморфны также в некоторой окрестности точки $(0, b_1, \ldots, b_k)$. Можно, следовательно, применить теорему существования и единственности (теорема 1, § 1): существует одно и только одно решение $y_i = \varphi_i(x)$ системы дифференциальных уравнений (2.1), голоморфное в окрестности точки $x = 0$ и такое, что $\varphi_i(0) = b_i$. Функции $\varphi_i(x)$ зависят, очевидно, от начальных значений $b_1, \ldots, b_k$, мы их обозначим через $\varphi_i(x;\ b_1, \ldots, b_k)$.

Теорема 3. *В принятых обозначениях функции $\varphi_i(x;\ b_1, \ldots, b_k)$ голоморфны по переменным $x, b_1, \ldots, b_k$ в окрестности начала координат $x = 0$, $b_1 = 0, \ldots, b_k = 0$.*

Иными словами, решение системы дифференциальных уравнений зависит *голоморфным образом* от начальных значений b_i неизвестных функций y_i.

Доказательство. Перейдем к новым неизвестным функциям

$$z_i = y_i - b_i. \tag{2.2}$$

Они должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dx} = f_i(x;\ z_1 + b_1, \ldots, z_k + b_k) \tag{2.3}$$

с начальными условиями $z_i(0) = 0$. Правые части уравнений (2.3) голоморфным образом зависят от параметров $b_1, \ldots, b_k$ в окрестности начала координат. Вследствие теоремы 2 единственное решение системы (2.3), обращающееся в нуль при $x = 0$, задается голоморфными функциями $z_i = \psi_i(x;\ b_1, \ldots, b_k)$.

Решение системы (2.1), такое, что $y_i = b_i$ при $x = 0$, задается функциями

$$y_i = b_i + \psi_i(x;\ b_1, \ldots, b_k)$$

и, следовательно, голоморфно по $x, b_1, \ldots, b_k$ в окрестности начала координат.

Теорема 3, таким образом, доказана.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Ограничимся одним примером: рассмотрим одно дифференциальное уравнение порядка k:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}). \tag{1}$$

Данная функция f голоморфна по $k+1$ переменным в окрестности точки $(a, b, b_1, \ldots, b_{k-1})$.

Ищем функцию $y = \varphi(x)$, голоморфную в окрестности точки $x = a$, такую, что $\varphi(a) = b$, ее последовательные производные $\varphi'(x), \ldots, \varphi^{(k-1)}(x)$ принимают в точке a значения $b_1, \ldots, b_{k-1}$, и для значений x, достаточно близких к a, тождественно выполняется соотношение

$$\varphi^{(k)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(k-1)}(x)).$$

Теорема 4. *Эта задача имеет одно и только одно решение.*

Доказательство. Классическим способом, путем введения новых неизвестных функций, сведем решение дифференциального уравнения (1) к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Более точно, введем, кроме неизвестной функции $y = \varphi(x)$, еще функции

$$y' = \frac{d\varphi}{dx}, \ldots, y^{(k-1)} = \frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}}.$$

Функции $y, y', \ldots, y^{(k-1)}$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y', \\ \dfrac{dy'}{dx} = y'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy^{(k-2)}}{dx} = y^{(k-1)}, \\ \dfrac{dy^{(k-1)}}{dx} = f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}). \end{cases} \tag{2}$$

Применим к системе (2) теорему 1 из § 1. Теорема 4 доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Дано линейное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$(a_0x + b_0)\, y^{(n)} + (a_1x + b_1)\, y^{(n-1)} + \ldots + (a_nx + b_n)\, y = 0 \tag{1}$$

Доказать, что если $U(z)$ — непрерывная функция в открытом множестве D, а γ — кусочно гладкий путь в D с началом в точке z_0 и концом в точке z_1, то функция $f(x)$, определенная интегралом

$$f(x) = \int\limits_\gamma e^{zx} U(z)\, dz, \tag{2}$$

голоморфна во всей плоскости переменного x.

Для того чтобы функция $f(x)$ была решением уравнения (1), достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\text{(I)} \quad e^{zx} A(z)\, U(z)\big|_{z_0}^{z_1} = 0,$$

$$\text{(II)} \quad \frac{d}{dz}\left(A(z)\, U(z)\right) = B(z)\, U(z),$$

где мы положили

$$A(z) = a_0z^n + \ldots + a_n, \quad B(z) = b_0z^n + \ldots + b_n.$$

Предположим, что многочлен $A(z)$ имеет n различных нулей $c_1, \ldots, c_n$. Показать, что можно записать

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \alpha + \frac{\alpha_1}{z-c_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{z-c_n},$$

где $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — комплексные постоянные, и вывести отсюда, что если γ_j ($j = 1, \ldots, n$) обозначает замкнутый гладкий путь в области D, где $D = \mathbf{C} \setminus \{c_1, \ldots, c_n\}$, проходящий через фиксированную точку $z_0 \in D$ и обходящий один раз точку c_j, и если $\gamma_{j,k}$ $(1 \leqslant j, k \leqslant n)$ обозначает контур, полученный последовательным прохождением пути γ_j в прямом направлении, пути γ_k в прямом направлении, пути γ_j в обратном направлении и, наконец, пути γ_k в обратном направлении, и если мы возьмем в интеграле (2) функцию

$$U(z) = \frac{1}{A(z)} e^{\alpha z} (z-c_1)^{\alpha_1} \ldots (z-c_n)^{\alpha_n} \quad (z \in D),$$

вообще говоря, многозначную, то интеграл (2), где $\gamma = \gamma_{j,k}$ (а следовательно, $z_0 = z_1$), определяет решение уравнения (1).

Показать, что таким образом получится не более чем $n-1$ решений (которые голоморфны в плоскости).

2. Доказательство теоремы о неявных функциях (предложение 6.1, гл. IV, § 5, п. 6) методом мажорант (мы будем следовать обозначениям, введенным в указанном предложении). Показать сначала, что можно свести все к случаю, когда $a_j = b_j = c_k = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p$, и что

$$f_j(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_p) = c_{j1}(z) x_1 + \ldots + c_{jn}(z) x_n + \\ + \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_n \geqslant 2} c_{j\nu_1 \ldots \nu_n}(z)\, x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n}, \qquad (1)$$

где коэффициенты $c_{jj'}(z)$ и $c_{j\nu_1 \ldots \nu_n}(z)$ сами являются степенными рядами от переменных $z_1, \ldots, z_p$ и

$$\det |c_{jj'}(z)| \neq 0,$$

если $x_1, \ldots, x_n$ и $z_1, \ldots, z_p$ достаточно малы.

Вывести отсюда, используя правило Крамера, что система (6.1), гл. IV, § 5 эквивалентна системе

$$x_j = \gamma_{j1}(z)\,y_1 + \ldots + \gamma_{jn}(z)\,y_n + \\ + \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n \geqslant 2} \gamma_{i\nu_1\ldots\nu_n}(z)\,x_1\ldots x_n, \qquad (2)$$

$j = 1, \ldots, n$, где коэффициенты γ сами являются степенными рядами от переменных $z_1, \ldots, z_p$, и что систему (2) можно записать следующим образом:

$$-x_j = \sum_{\substack{1 \leqslant j' \leqslant n \\ \varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \geqslant 0}} \gamma_{jj';\,\varkappa_1\ldots\varkappa_p} y_{j'} z_1^{\varkappa_1}\ldots z_p^{\varkappa_p} + \\ + \sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_n \geqslant 2 \\ \varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \geqslant 0}} \gamma_{j;\,\nu_1\ldots\nu_n;\,\varkappa_1\ldots\varkappa_p} x_1^{\nu_1}\ldots x_n^{\nu_n} z_1^{\varkappa_1}\ldots z_p^{\varkappa_p} \\ (j = 1, \ldots, n). \qquad (3)$$

Показать, что для того чтобы n формальных рядов

$$x_j = \sum_{\sum_{i=1}^{n}\mu_i + \sum_{i=1}^{p}\sigma_i \geqslant 1} d_{j;\,\mu_1,\ldots,\mu_n;\,\sigma_1,\ldots,\sigma_p} y_1^{\mu_1}\ldots y_n^{\mu_n} z_1^{\sigma_1}\ldots z_p^{\sigma_p}, \\ j = 1, \ldots, n \qquad (4)$$

образовывали систему формальных решений системы (3), необходимо и достаточно, чтобы

$$d_{j;\,\mu_1,\ldots,\mu_n;\,\sigma_1,\ldots,\sigma_p} = Q_{j;\,\mu_1,\ldots,\mu_n;\,\sigma_1,\ldots,\sigma_p}(\gamma, d),$$

где Q обозначает определенный многочлен с целыми коэффициентами от переменных $\gamma_{jj';\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}$, $\gamma_{j;\,\nu_1,\ldots,\nu_n;\,\varkappa'_1,\ldots,\varkappa'_p}$ и $d_{j;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_n;\,\tau_1,\ldots,\tau_p}$, причем переменные $d_{j;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_n;\,\tau_1,\ldots,\tau_p}$ входят в него, только если

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \tau_1 + \ldots + \tau_p < \mu_1 + \ldots + \mu_n + \sigma_1 + \ldots + \sigma_p.$$

Вывести отсюда, что существует одна и только одна система формальных решений системы (3).

Для доказательства сходимости полученных рядов показать, что система (3) обладает мажорантой следующего вида:

$$X_j = \frac{M}{1 - \dfrac{Z_1 + \ldots + Z_p}{R}} \left\{ Y_1 + \ldots + Y_n + \frac{1}{1 - \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{R}} - \right.$$

$$\left. - 1 - \frac{X_1 + \ldots + X_n}{R} \right\},$$

где M и R — действительные положительные числа (заметить, что разложение в степенной ряд функции $\frac{1}{(1-T_1)\ldots(1-T_n)}$ мажорируется разложением функции $\frac{1}{1-(T_1+\ldots+T_n)}$) и что, следовательно, положив $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, мы получим мажоранту рядов (4), если разрешим уравнение второй степени относительно X:

$$X = \frac{M}{1 - \dfrac{Z_1 + \ldots + Z_p}{R}} \left\{ Y_1 + \ldots + Y_n + \frac{1}{1 - nX/R} - \right.$$

$$\left. - 1 - \frac{nX}{R} \right\}$$

(посмотреть доказательство предложения 9.1 гл. I, § 2, п. 9).

НЕКОТОРЫЕ ОТВЕТЫ

Глава I

3. $P_2=a_2b_1^2,\ P_3=2a_2b_1b_2+a_3b_1^3,$

$P_4=a_2(2b_1b_3+b_2^2)+3a_3b_1^2b_2+a_4b_1^4,$

$P_5=2a_2(b_1b_4+b_2b_3)+3a_3(b_1^2b_3+b_1b_2^2)+4a_4b_1^3b_2+a_5b_1^5.$

$$X+\frac{1}{3}X^3+\frac{2}{15}X^5+\cdots .$$

4. а) бесконечный; б) 1; в) $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$.

6. 1.

14. (2) $n\pi/a$, n целое.

Глава III

17. (1) $x=\dfrac{2\operatorname{Re} z}{1+|z|^2}$, $y+\dfrac{2\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}$, $u=\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$

20. (1) $(\pi(2n-2)!)\,(2^n[(n-1)!]^2a^{n-1/2}b^{1/2})$,

(2) $\pi(b-a)$,

(3) $\pi(e^{-a}-1/2)$,

(4) $\pi a^n/(1-a^2)$, если $|a|<1$, $\pi/a^n(a^2-1)$, если $|a|>1$.

23. (2) $\pi/(n\sin(\alpha+1)\pi/n)$.

25. (1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a+bn^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\operatorname{ctg}\pi\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{1}{a}\right)$,

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2}{n^4+a^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}a}\,\frac{\operatorname{sh}\pi a\sqrt{2}-\sin\pi a\sqrt{2}}{\operatorname{ch}\pi a\sqrt{2}-\cos\pi a\sqrt{2}},$$

(2) $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{x^2-p^2}=\frac{1}{2x}\left(\pi\operatorname{ctg}\pi x-\frac{1}{x}\right)$.

Глава V

8. $(-1)^n/n!$.

9. $a_6=a_2^3/3,\ a_8=3a_2a_4/11$.

Глава VI

7. $w=\varrho z/\sqrt{a^2z^2+\varrho^4-a^4}$ (выбрана та ветвь корня, которая действительна и положительна при действительных z) .

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Цифры обозначают соответственно
номер главы
номер параграфа
номер пункта (*или*, возможно, упражнения).

Автоморфизм области	VI	2	2
— сферы Римана	VI	2	4
Адамара теорема о трех кругах	III	упр.	8
— формула	I	2	3
Алгебра полиномов	I	1	1
— формальных степенных рядов	I	1	2
Аналитическая функция	I	4	1
	IV	2	2
Аналитическое пространство	VI	4	2
Антиголоморфное преобразование	VI	1	1
Аргумент	I	3	4
Бесконечная точка	III	5	1
Вейерштрасса теорема	III	4	4
— функция $\wp$	V	2	5
Величина абсолютная комплексного числа	I	2	1
Ветвление	VI	4	6
Вычет	III	5	2
— на аналитическом пространстве	VI	4	8
Гармоническая функция	IV	3	1
Гартогс	IV	5	2
Голоморфная функция	II	2	2
— — на аналитическом пространстве	VI	4	1
— — — бесконечности	III	5	1
— — — римановой поверхности	VI	5	2
— — — сфере Римана	III	5	1
— — нескольких переменных	IV	3	1
Гомотопные пути замкнутые	II	1	6
— — с фиксированными концами	II	1	6

Граница компакта ориентированная	II	1	9
Грина — Римана формула	II	1	3
			и 9
Группа автоморфизмов	VI	2	2
— — плоскости	VI	2	3
— периодов	III	5	5
Даламбера теорема	III	1	2
Дирихле задача	IV	4	3
Звездное множество	II	1	7
Изменение аргумента	II	1	5
Изоморфизм аналитических пространств	VI	4	2
— одной области на другую	VI	1	3
Инверсия с отражением	VI	2	5
Индекс ветвления	VI	4	6
— замкнутого пути	II	1	8
Карта	III	5	1
Конформное отображение	VI	1	1
— представление	VI	2	1
Координаты локальные	VI	4	1
Коши интегральная формула	II	2	5
	IV	5	2
— неравенство	III	1	1
	III	4	4
	IV	5	4
— теорема	II	2	4
Кратность нуля	I	4	4
— полюса	I	4	5
Кривая эллиптическая	V	2	5
	VI	5	3
Критическая точка	VI	1	2
Лапласа оператор	IV	3	1
Лиувилля теорема	III	1	2
Логарифм комплексный	I	3	5
Лорана разложение	III	4	2
— ряд	III	4	1
Мера угла	I	3	4
Мероморфная функция	I	4	5
— — на аналитическом пространстве	VI	4	5
— — — бесконечности	III	5	1

— — — римановой поверхности	VI	5	2
Модуль комплексного числа	I	2	1
Морера теорема	II	2	7
Накрытие	VI	5	1
Непрерывная ветвь логарифма	I	3	5
Неразветвленная риманова поверхность	VI	5	1
Неразветвленное отображение	VI	4	6
Норма комплексного числа	I	2	1
Нормальная сходимость ряда	I	2	2
Область сходимости	IV	1	2
Обратный ряд в кольце сходящихся степенных рядов	I	2	6
— — — — формальных рядов	I	1	5
— — относительно закона композиции к сходящемуся степенному ряду	I	2	9
— — — — — — формальному ряду	I	1	7
Ограниченное подмножество пространства $\mathscr{H}(D)$	V	4	1
Однолистное отображение	V	1	2
Односвязная область	II	1	7
Ориентация пути	II	1	1
Открытое отображение	VI	1	3
Параллелограмм периодов	III	5	5
Периоды (интеграла дифференциальной формы на аналитическом пространстве)	VI	4	8
Пикара теорема	III	4	4
Поверхность Римана	VI	5	1
Подгруппа стационарная	VI	2	3
Поднятие пути	VI	5	4
Подстановка одного формального ряда в другой	I	1	4
— сходящегося степенного ряда	I	2	5
Полюс	I	4	5
	III	4	4
Порядок формального ряда	I	1	3
— — — нескольких переменных	IV	1	1
Последовательность компактов исчерпывающая	V	1	3
Примитивная дифференциальной формы	II	1	2
— — — на аналитическом пространстве	IV	4	8
— замкнутой дифференциальной формы вдоль пути	II	1	5
Принцип аналитического продолжения	I	4	3
	IV	2	3
	VI	4	4
	VI	5	4
— максимума	III	2	2
	VI	4	4
	IV	упр.	4
Произведение бесконечное	V	3	1

Производная сходящегося степенного ряда	I	2	7
— формального ряда	I	1	6
Пространство аналитическое	VI	4	2
Пуассона формула	IV	4	1
— ядро	IV	4	1,2
Путь гладкий	II	1	1
— замкнутый	II	1	1
— кусочно гладкий	II	1	1
— не обязательно гладкий	II	1	5
Равномерно сходящийся ряд	I	2	2
Радиус сходимости	I	2	3
Разложение Лорана	III	4	2
— Тейлора	II	2	6
Разложимость функции в ряд Лорана	III	4	2
— — — степенной ряд	I	4	1
Римана сфера	III	5	1
Риманова поверхность	VI	5	1
Руше теорема	III	упр.	19
Ряд Лорана	III	4	1
— мажорирующий	VII	1	3
— Тейлора	III	1	1
— формальный	I	1	2
— — нескольких переменных	IV	1	1
Семейство нормальное	V	4	
Симметрии принцип	II	2	9
	VI	упр.	6
Структура аналитическая индуцированная	VI	4	2
— аналитического пространства	VI	4	1
Субгармоническая функция	IV	упр.	4
Суммируемое семейство формальных рядов	I	1	3
Сфера Римана	III	5	1
Сходимость нормальная на компактах	V	1	1
— равномерная на компактах	V	1	1
— рядов мероморфных функций	V	2	1
Тейлора разложение	II	2	6
— ряд	III	1	1
Теорема о среднем для гармонических функций	IV	3	3
	IV	4	5
— — — — голоморфных функций	III	2	1
— основная о конформных отображениях	VI	4	7
	VI	3	1
Точка критическая	VI	1	2
— особая изолированная	III	4	4
— существенно особая	III	4	4
Форма дифференциальная голоморфная на аналитическом пространстве	VI	4	8

— — замкнутая	II	1	4
Функция Γ	V	3	4
— ℘ Вейерштрасса	V	2	5

Шварца лемма	III	3	

Эквивалентные структуры аналитических пространств	VI	4	2
Экспоненциальная функция	I	3	1
— — действительная	I	3	2
— — мнимая	I	3	3

Ядро Пуассона	IV	4	1,2

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\omega(S)$	I	1	3
$K[X]$	I	1	1
$K[[X]]$	I	1	2
$S\circ T$	I	1	4
$\mathbf{R}$	I	2	1
$\mathbf{C}$	I	2	1
$\|z\|$, $\bar{z}$	I	2	1
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$	I	2	1
$\int_\gamma \omega$	II	1	1, 5
$I(\gamma, a)$	II	1	8
$\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	II	2	2
$M(r)$	III	1	1
$\mathbf{S}_2$	III	5	1
$\operatorname{Res}(f, a)$	III	5	2
$K[[X, Y]]$	IV	1	1
$\mathscr{C}(D)$	V	1	1
$\mathscr{H}(D)$	V	1	1
$M_i(f)$	V	1	3
$d(f)$	V	1	3
$\wp$	V	2	5
Γ	V	3	4
ϑ_0, ϑ_1	V	упр. 3,	11
$\Gamma(D)$	VI	2	2
$\Gamma(P)$	VI	2	6
$\Gamma(B)$	VI	2	6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . 5

Предисловие 7

Глава I. **Степенные ряды от одного переменного** 11

§ 1. Формальные степенные ряды 11
§ 2. Сходящиеся степенные ряды 20
§ 3. Экспоненциальная и логарифмическая функции 35
§ 4. Аналитические функции действительного и комплексного переменного 45
Упражнения 55

Глава II. **Голоморфные функции, интеграл Коши** . . . 62
§ 1. Криволинейные интегралы 62
§ 2. Голоморфные функции; основные теоремы . . 84
Упражнения 97

Глава III. **Ряды Тейлора и Лорана. Особые точки и вычеты** 102
§ 1. Неравенство Коши; теорема Лиувилля . . . 102
§ 2. Теорема о среднем. Принцип максимума . . . 104
§ 3. Лемма Шварца 107
§ 4. Разложение функций в ряд Лорана 108
§ 5. Введение бесконечной точки. Теорема о вычетах 115
§ 6. Вычисление интегралов с помощью вычетов 126
Упражнения 140

Глава IV. **Аналитические функции многих переменных; гармонические функции** 153

§ 1. Степенные ряды с многими переменными . . 153
§ 2. Аналитические функции 156
§ 3. Гармонические функции двух действительных переменных 158
§ 4. Формула Пуассона. Задача Дирихле 165
§ 5. Голоморфные функции многих комплексных переменных 171
Упражнения 178

Глава V. **Сходимость последовательностей голоморфных и мероморфных функций. Ряды, бесконечные произведения; нормальные семейства** 183
§ 1. Топология пространства $\mathscr{C}(D)$ 183
§ 2. Ряды мероморфных функций 191
§ 3. Бесконечные произведения голоморфных функций 203
§ 4. Компактные подмножества в пространстве $\mathscr{H}(D)$ 209
Упражнения 217

Глава VI. **Голоморфные отображения** 222
§ 1. Общие понятия. Примеры 222
§ 2. Конформное отображение 230
§ 3. Основная теорема о конформных отображениях 238
§ 4. Понятие аналитического пространства. Интегрирование дифференциальных форм 243
§ 5. Римановы поверхности 254
Упражнения 270

Глава VII. **Системы дифференциальных уравнений** . . 274
§ 1. Теорема существования и единственности 274
§ 2. Зависимость от параметров и начальных условий 281
§ 3. Дифференциальные уравнения высшего порядка 284

Упражнения 285
Некоторые ответы 289
Предметный указатель 290
Указатель обозначений 294

А. КАРТАН

Элементарная норма аналитических функций